

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA  
EKONOMICKÁ FAKULTA



Katedra financí

# Využití matematického programování pro řešení trasovacích úloh

Mathematical Programming Application in Routing Problems Solving

student: Bc. František Špaček  
vedoucí práce: Ing. Mgr. Petr Kozel, Ph.D.

OSTRAVA 2018



# Zadání diplomové práce

Student: **Bc. František Špaček**

Studijní program: N6202 Hospodářská politika a správa

Studijní obor: 6202T010 Finance

Téma: **Využití matematického programování pro řešení trasovacích úloh**  
**Mathematical Programming Application in Routing Problems Solving**

Jazyk vypracování: čeština

Zásady pro vypracování:

1. Úvod
  2. Definování problému a představení teoretických východisek pro jeho řešení
  3. Sestavení matematických modelů a vlastní realizace optimalizačních výpočtů
  4. Interpretace a ekonomické zhodnocení dosažených výsledků
  5. Závěr
- Seznam použité literatury  
Seznam zkratk  
Prohlášení o využití výsledků diplomové práce  
Seznam příloh  
Přílohy

Seznam doporučené odborné literatury:

- BRAMEL, J., X. CHEN and D. SIMCHI-LEVI. *The Logic of Logistics*. New York: Springer, 2014. ISBN 978-1-4614-9148-4.
- FU, Michael and Saul GASS. (Eds.) *Encyklopedia of Operations Research and Management Science*. New York: Springer, 2013. ISBN 978-1-4419-1137-7.
- RAY, Santanu. *Graph Theory with Algorithms and its Applications: In Applied Science and Technology*. New York: Springer, 2013. ISBN 978-81-322-0749-8.

Formální náležitosti a rozsah diplomové práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí diplomové práce: **Ing. Mgr. Petr Kozel, Ph.D.**

Datum zadání: 24.11.2017

Datum odevzdání: 27.04.2018



---

Ing. Iveta Ratmanová, Ph.D.  
vedoucí katedry

---

prof. Dr. Ing. Zdeněk Zmeškal  
děkan fakulty

## Prohlášení

Výsledky předložené diplomové práce jsou začleněny do širšího projektu TAČR TH02010930 „*RETIA - Efektivní přístupy k úsporným a adaptabilním systémům údržby a obsluhy dopravních sítí*“, který je řešen na Ekonomické fakultě Vysoké školy báňské – Technické univerzity v Ostravě.

„Prohlašuji, že jsem celou práci, včetně všech příloh, vypracoval samostatně.“

V Ostravě dne 16. dubna 2018

  
.....  
Bc. František Špaček

## **Poděkování**

Na tomto místě bych rád poděkoval Ing. Mgr. Petrovi Kozlovi, Ph.D. za vstřícný přístup, čas, ochotu a cenné rady, díky kterým mohla tato práce vzniknout. Dále bych chtěl poděkovat Mgr. Marianu Genčevovi, Ph.D. za poskytnutí šablony, na které byla tato diplomová práce zpracována. Rád bych také poděkoval Ing. Lucii Orlíkové, Ph.D. za realizaci výpočtů v nástroji ArcGIS.



# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Definování problému a představení teoretických východisek pro jeho řešení</b>	<b>7</b>
2.1	Stručný popis problému . . . . .	7
2.2	Teoretická východiska . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Sestavení matematických modelů a vlastní realizace optimalizačních výpočtů</b>	<b>27</b>
3.1	Trasovací úlohy . . . . .	27
3.2	Numerické experimenty na reálných datech . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Interpretace a ekonomické zhodnocení dosažených výsledků</b>	<b>45</b>
4.1	Výpočet a komparace úspor podle četnosti svozu . . . . .	47
4.2	Výpočet a komparace úspor na základě odhadnutých cen pohonných hmot	48
<b>5</b>	<b>Závěr</b>	<b>53</b>
	<b>Literatura</b>	<b>55</b>
	<b>Seznam zkratk</b>	<b>59</b>
	<b>Seznam obrázků a tabulek</b>	
	<b>Prohlášení o využití výsledků diplomové práce</b>	





# Kapitola 1

## Úvod

Píše se rok 1925 a obchodník H. M. Cleveland, pracující pro společnost Page Seed<sup>1</sup> se připravuje na svou obchodní cestu, kterou každoročně opakuje. Jako jeden z mnoha obchodních cestujících, vydává se pan Cleveland na dlouhou cestu čítající 350 zastavení, která jsou předmětem jeho obchodního jednání. Součástí pečlivé přípravy na tuto nelehkou a časově náročnou cestu je plán obchodní trasy, sestávající se z posloupnosti měst, která budou postupně navštívena, a ve kterých bude uskutečněno obchodní jednání.

K efektivnímu plánování své trasy mohl pan Cleveland ve své době využít některého z knižních průvodců, např. *Commercial Travellers's Guide*, nebo mechanický plánovač, kterým byla mapová skříňka, špendlíky a provázky, pro snadnou optimalizaci cesty.

Z dochovaných záznamů je možné zjistit, že zamýšlená cesta obchodníka Clevelanda po 350 městech státu Maine<sup>2</sup> trvala 47 dní (od 9. července do 24. srpna). A jak lze vyčíst z dopisu adresovaného vedoucímu Page Seed, „optimalizace“ cesty napomohla k zefektivnění přesunů a úspoře času. Podobných příběhů jako byl právě tento lze v historii nalézt celou škálu. Ať už se jedná o obchodníky, právníky, politiky, nebo též kazatele, kteří se vydávali na své cesty za různými cíli. Společným úsilím všech bylo naplánovat zamýšlenou cestu pohodlně a zároveň efektivně s ohledem na délku cesty, která se odrážela v nákladech na její realizaci (Cook, 2011).

Stejné motivy, které pobízely k přemýšlení a plánování naše předchůdce, můžeme objevovat v potřebách současné společnosti. V mnoha odvětvích lidského snažení jsou hledány odpovědi na otázky, jak naplánovat efektivní silniční, námořní, letecké či železniční dopravní systémy, anebo jen turistickou trasu či cestu do školy. Může se jednat o dopravní systémy veřejné dopravy, vojenskou logistiku, ale také systémy humanitární pomoci či systémy podnikové úrovně (zásobovací a distribuční). Za zmínění rovněž stojí v posledních letech roustoucí celosvětový trend tzv. „inteligentních“ dopravních systémů, kterými disponují autonomní vozidla.<sup>3</sup> Ve zmíněných dopravních systémech tak vznikají požadavky na neustále se měnící plánování tras dle požadavků a potřeb společnosti.

---

<sup>1</sup>Společnost se zabývá dodávkami semen mnoha plodin.

<sup>2</sup>Stát Maine leží na východním pobřeží USA v severovýchodním regionu.

<sup>3</sup>Inteligentní systémy jsou v současnosti užívány např. společnosti Amazon, Inc. či Alibaba Group.

Přidanou hodnotou současné moderní společnosti však je disponování výpočetními nástroji, které jsou schopny realizovat mnohdy náročné (časově i výpočetně) operace, které byly třeba i dříve teoreticky známy, avšak z důvodu jejich náročnosti a rozsáhlosti neřešitelné.

Jednou z poměrně mladých disciplín, která je takto spjata s rozvojem výpočetní techniky, je matematické programování, jehož počátky můžeme datovat přibližně do 50. let 20. století. Metody matematického programování jsou dnes hojně rozšířeny ve všech činnostech, ve kterých dochází k rozhodovacím procesům (již zmíněné distribuční a zásobovací procesy, výrobní programy firmy, optimalizace portfolia, rozhodování o strategii reklamy apod.).

Předložená diplomová práce je věnována využití matematického programování jako nástroje pro podporu rozhodování v těch oblastech, ve kterých je nutné plánovat trasy obslužných vozidel s cílem minimalizovat celkovou ujetou vzdálenost. Ta se dále promítá do velikosti nákladů spojených se zabezpečením dané služby.

Práce je zcela konkrétně zaměřena na návrh tras obslužných vozidel, vykonávajících svoz separovaného odpadu ve městě Olomouci.

## Kapitola 2

# Definování problému a představení teoretických východisek pro jeho řešení

V úvodu práce bylo předesťeno, že cílem předloženého textu je realizace návrhu optimálních tras obslužných vozidel, zabezpečujících svoz separovaného odpadu na území města Olomouce. V této souvislosti je vhodné představit krátce problém, který bude předmětem řešení.

### 2.1 Stručný popis problému

Olomouc je město, jehož historie sahá nejméně do 7. století, kdy se oblast kolem Olomouckého kopce stala domovem prvních slovanských osadníků. Dnem 24. listopadu 1990 vzniklo jako samostatná právnická osoba a obdrželo hodnost statutárního města. V současné době žije v Olomouci nad sto tisíc obyvatel, což ji opravňuje k užívání titulu šestého nejlidnatějšího města České republiky. Služby spojené s obstaráváním úklidu města a hospodaření s odpady zabezpečují Technické služby města Olomouce, a.s. Svoz komunálního a separovaného odpadu je pak nejrozsáhlejší činností, kterou Technické služby města Olomouce, a.s. zabezpečují. Z hlediska separování odpadu je svoz rozdělen do tří základních oblastí. Jedná se o svoz papíru, skla a plastů. S ohledem na rozsah předložené diplomové práce bude předmětem návrhu optimálních tras pouze vybraná oblast, a to oblast, týkající se svozu plastů. Podrobný popis specifik, vztahujících se ke svozu plastů, zaměřený na návrh obslužných tras, bude popsán v samostatné podkapitole [3.2](#). V této chvíli je nutné zaměřit pozornost na představení teoretických východisek pro řešení problému a vymezení základních pojmů, se kterými bude dále hojně pracováno.

## 2.2 Teoretická východiska

Mezi dvě teoretické oblasti, na jejichž základech bude dále stavěno, jsou oblast teorie grafů a oblast matematického programování. Obě budou nyní představeny se zaměřením na výběr podstatných charakteristik, které budou v práci používány.

### 2.2.1 Teorie grafů

V první řadě bude věnována pozornost teorii grafů. Přestože se prvky myšlení teorie grafů objevovaly již v dávné historii, jako samostatná matematická disciplína vznikla až v první polovině 20. století. Za průlomovou je v teorii grafů považována práce o problému sedmi mostů města Kaliningrad, která byla v roce 1736 vyřešena švýcarským matematikem Leonhardem Eulerem. Leonhard Euler je tak považován za jejího zakladatele. Nepřehlédnutelným a důležitým mezníkem byl rok 1847, kdy se Gustav Kirchhoff zabýval výpočtem proudů v elektrických sítích a v tomto zkoumání navrhl grafické řešení v podobě tzv. kostry grafu<sup>1</sup>. O dvanáct let později, v roce 1859, se irský matematik R.W.Hamilton zabýval cestováním po vrcholech a hranách pravidelného dvanáctistěnu. Formuloval úlohu k nalezení okružní cesty, spočívající v obsluze každého geometrického průsečíku dvanáctistěnu právě jednou. Dalším významným mezníkem je rok 1874, kdy A. Cayley při studiu strukturovaných chemických vzorců využil jejich zobrazení ve formě grafu. Na to v roce 1878 navazuje J. J. Sylvester, když použil termín graf v takovém významu, jakém jej teorie grafů dnes užívá. Významných poznatků bylo také dosaženo v první polovině 20. století v Československu. Např. v roce 1926 byl zveřejněn algoritmus Otakara Borůvky, určený pro nalezení tzv. minimální kostry grafu<sup>2</sup>. Tento problém byl rovněž vyřešen jiným algoritmem, zveřejněným Vojtěchem Jarníkem v roce 1930.

Pro účely diplomové práce je nyní nutné definovat základní pojmy, se kterými bude dále pracováno. Vzhledem ke skutečnosti, že řada definic je v obdobné podobě používána v celé škále odborných publikací, nebudou zde tyto definice citovány vzhledem ke konkrétnímu autoru, ale nechť je uvedeno, že stěžejními zdroji jsou: (Bondy, Murty, 2008); (Ray, 2013); (Palúch, 2008).

V první řadě bude pozornost věnována základním termínům teorie grafů, kterým je graf, s jeho základními stavebními dvojicemi vrcholem a hranou.

**Definice 2.1. Grafem** se rozumí uspořádaná dvojice  $G = (V, H)$ , kde  $V$  je neprázdná konečná množina a  $H$  je množina neuspořádaných dvojic typu  $\{u, v\}$  takových, že  $u \in V$ ,  $v \in V$  a  $u \neq v$ , t.j.

---

<sup>1</sup>Kostra souvislého grafu  $G = (V, H)$  je takový jeho faktorový podgraf, který je stromem. (Palúch, 2008)

<sup>2</sup>Pokud cena  $c(K)$  kostry  $K$  je součet ohodnocení jejích hran, minimální kostra v grafu  $G$  je kostra s nejmenší cenou. (Palúch, 2008)

$$H \subseteq \{\{u, v\} \mid u \neq v, u, v \in V\}. \quad (2.1)$$

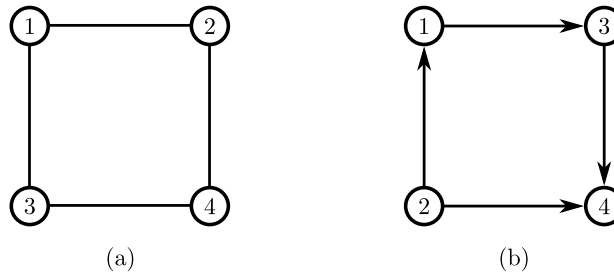
Prvky množiny  $V$  jsou nazývány vrcholy a prvky množiny  $H$  hranami grafu  $G$ .

V mnoha případech reálných sítí může nastat situace, kdy jsou určité úseky jednosměrné. Tato problematika je v teorii grafů prezentována digrafem, jehož definice je uvedena níže.

**Definice 2.2. Digrafem** je označována uspořádaná dvojice  $\vec{G} = (V, H)$ , kde  $V$  je neprázdná konečná množina a  $H$  je množina uspořádaných dvojic typu  $(u, v)$  takových, že  $u \in V$ ,  $v \in V$  a  $u \neq v$ , t.j.

$$H \subseteq \{(u, v) \mid u \neq v, u, v \in V\}. \quad (2.2)$$

Prvky množiny  $V$  představují stejně jako v grafu vrcholy, prvky množiny  $H$  jsou zde však orientovanými hranami digrafu  $\vec{G}$ . Příklady grafu a digrafu jsou zachyceny v diagramech na obrázku 2.1 níže.



Obrázek 2.1 Diagramy a) grafu a b) digrafu.

Zdroj: Vlastní zpracování

Nyní budou definovány pojmy, které se k popisu grafů a digrafů bezprostředně vážou.

**Definice 2.3. Úplný graf**, resp. **úplný digraf**, je takový  $G = (V, H)$ , resp.  $\vec{G} = (V, H)$ , jehož množina  $H$  obsahuje všechny možné dvojice typu  $\{u, v\}$ , resp.  $(u, v)$ , kde  $u, v \in V$  a  $u \neq v$ .

**Definice 2.4. Stupněm vrcholu**  $\deg(u)$  grafu  $G = (V, H)$  je počet hran incidentních s vrcholem  $u$ .

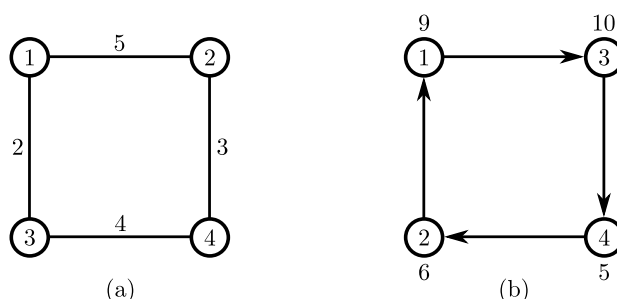
**Definice 2.5. Vstupní stupeň  $u$ -tého vrcholu**, značen jako  $\text{ideg}(u)$ , je v digrafu  $\vec{G} = (V, H)$  počet hran do  $u$ -tého vrcholu vcházejících.

**Definice 2.6. Výstupní stupeň  $u$ -tého vrcholu**, značen jako  $\text{odeg}(u)$ , je v digrafu  $\vec{G} = (V, H)$  počet hran z  $u$ -tého vrcholu vycházejících.

**Definice 2.7. Hranově ohodnocený graf (digraf)** je takto nazýván, je-li každé hraně, resp. orientované hraně  $h \in H$  přiřazené reálné číslo  $c(h)$  označované jako cena hrany  $h$  nebo také ohodnocení hrany  $h$ . Hranově ohodnocený graf je tedy uspořádaná trojice  $G = (V, H, c)$ , kde  $V$  je množina vrcholů,  $H$  množina hran a  $c : H \rightarrow \mathbb{R}$  je reálná funkce definovaná na množině  $H$ .

**Definice 2.8. Vrcholově ohodnocený graf (digraf)** je uspořádaná trojice  $G = (V, H, d)$ , kde  $V$  je množina vrcholů,  $H$  množina hran a  $d : V \rightarrow \mathbb{R}$  je reálná funkce definovaná na množině  $V$ . Číslo  $d(v)$  se nazývá ohodnocením vrcholu  $v$  nebo také cenou vrcholu  $v$ .

Příklady hranově ohodnoceného grafu a vrcholově ohodnoceného digrafu jsou zachyceny na obrázku č. 2.2.



**Obrázek 2.2** Diagram a) hranově ohodnoceného grafu a b) vrcholově ohodnoceného digrafu.

*Zdroj: Vlastní zpracování*

Aby bylo možné s grafy efektivně pracovat, je vhodné představit základní způsoby jejich reprezentace. Některé typy reprezentace grafů jsou vhodné pro vizuální názornost, zde se jedná především o diagramy, jiné způsoby jsou zase vhodné pro výpočetní práci s grafy, zde se jedná např. o množinové zápisy. Věnujme tedy vybraným způsobům reprezentace grafů pozornost.

### a) Diagram grafu

Prvním ze způsobu reprezentace grafu je diagram grafu. Tento způsob znázornění grafu již byl použit. Diagramy grafů je možné vidět na obrázcích č. 2.1 a č. 2.2.

### b) Množinový zápis

Dalším způsobem reprezentace grafu je jeho množinový zápis. Tento způsob lze představit na hranově ohodnoceném grafu z obrázku č. 2.2, písmeno a). Pokud  $V$  značí množinu vrcholů a  $H$  množinu hran, tak množinovým zápisem lze zaznamenat, že  $V_1 = \{1, 2, 3, 4\}$  a  $H_1 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$ . Těmito množinami je stanoven graf  $G_1 = (V_1, H_1)$ .

V případě orientovaného digrafu z obrázku č. 2.2, písmeno b), lze množinu vrcholů zapsat obdobně, tedy jako  $V_2 = \{1, 2, 3, 4\}$ . Avšak v případě množiny hran je nutné zohlednit jejich orientovanost. Množinu hran lze tedy zaznamenat například jako  $H_2 = \{(1, 3), (2, 1), (3, 4), (4, 2)\}$ . Nakonec lze konstatovat, že množinami  $V_2$  a  $H_2$  je stanoven digraf  $\vec{G}_2 = (V_2, H_2)$ .

Jak bylo ukázáno, množinovým zápisem lze docílit úsporného, rychlého a nenáročného způsobu znázornění struktury grafu.

### c) Matice přilehlosti

Matice přilehlosti  $M = (m_{ij})$  je čtvercová matice typu  $n \times n$ , kde  $n = |V|$  je počet vrcholů grafu resp. digrafu. Jak již z názvu vyplývá, matice vyjadřuje přilehlost hran k různým dvojicím vrcholů grafu  $G$ , resp. digrafu  $\vec{G}$ . Prvky matice  $M$  jsou definovány následujícím způsobem, pro graf  $G$ :

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{když } \{i, j\} \in H \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \quad (2.3)$$

a pro digraf  $\vec{G}$ :

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{když } (i, j) \in H \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \quad (2.4)$$

Nyní bude způsob této reprezentace představen na digrafu  $\vec{G} = (V, H)$  z obrázku č. 2.1 b).

**Tabulka 2.1** Matice přilehlosti  $M$  digrafu z obrázku 2.1 b).

	1	2	3	4
1	0	0	1	0
2	1	0	0	1
3	0	0	0	1
4	0	0	0	0

*Zdroj: Vlastní zpracování.*

Lze si všimnout, že matice přilehlosti  $M$  digrafu z tabulky č. 2.1 je podle hlavní diagonály nesymetrická. V případě matic přilehlosti grafů jsou tyto matice podle hlavní diagonály symetrické.

### d) Matice ohodnocení hran

Posledním zde uvedeným způsobem reprezentace grafu resp. digrafu, je pomocí matice ohodnocení hran  $M$ . Tento způsob reprezentace lze využít pouze pro hranově ohodnocený



graf resp. digraf. Jedná se o matici typu  $n \times n$ , kde  $n = |V|$  je počet vrcholů grafu, resp. digrafu. Prvky matice  $M$  jsou definovány následujícím způsobem, pro graf  $G$ :

$$m_{ij} = \begin{cases} c(\{i, j\}) & \text{když } \{i, j\} \in H \\ \infty & \text{jinak,} \end{cases} \quad (2.5)$$

a pro digraf  $\vec{G}$ :

$$m_{ij} = \begin{cases} c((i, j)) & \text{když } (i, j) \in H \\ \infty & \text{jinak.} \end{cases} \quad (2.6)$$

V matici  $M$  jsou zachyceny délky hran mezi jednotlivými vrcholy, tyto délky zároveň informují o skutečnosti, zda mezi vrcholy existuje nebo neexistuje hrana. Níže je tento způsob reprezentace grafu představen na hranově ohodnoceném grafu z obrázku č. 2.2 a).

**Tabulka 2.2** Matice ohodnocení hran  $M$  grafu z obrázku č. 2.2 a).

	1	2	3	4
1	$\infty$	5	2	$\infty$
2	5	$\infty$	$\infty$	3
3	2	$\infty$	$\infty$	4
4	$\infty$	3	4	$\infty$

*Zdroj: Vlastní zpracování.*

Matice přilehlosti  $M$  grafu z tabulky č. 2.2 a) je symetrická. Matice ohodnocení hran digrafů je však zpravidla nesymetrická.

Nyní byly představeny základní pojmy potřebné k definování konkrétního grafu. S využitím těchto poznatků budou popisovány reálné dopravní sítě, které budou pro další práci a aplikaci výpočetních algoritmů matematického programování reprezentovány právě prostřednictvím grafů, digrafů resp. jejich kombinací migrafů.

V reálné dopravní síti se pohybují obslužná vozidla, která vykonávají obslužné úkony. Tento pohyb dopravního prostředku po dopravní cestě bude modelován i v grafech, které reálnou síť zachycují. Pro popis specifických způsobů pohybu prostředku po dopravní síti využívá teorie grafů terminologii, která je souhrně označována jako „cestování v grafech“. Věnujme tedy nyní pozornost vybraným pojmům z podoblasti cestování v grafech, které jsou potřebné pro další postup v práci. Uvedené definice zde opět nebudou citovány vzhledem ke konkrétnímu autorovi, ale souhrně budou uvedeny zdroje, ze kterých bylo čerpáno: (Bondy a Murty, 2008); (Ray, 2013); (Palúch, 2008).

Nejprve bude představen sled a orientovaný sled, neboť tyto pojmy jsou v cestování v grafech základními. Z těchto pojmů jsou následně odvozovány další, zde např. tah a cesta.

**Definice 2.9.** *Sled* v grafu  $G = (V, H)$  je libovolná střídavá posloupnost vrcholů a hran ve tvaru

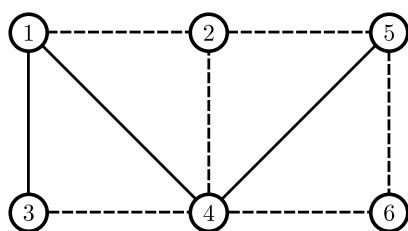
$$\mu(v_1, v_k) = (v_1, \{v_1, v_2\}, v_2, \{v_2, v_3\}, v_3, \dots, \{v_{k-1}, v_k\}, v_k). \quad (2.7)$$

**Definice 2.10.** *Orientovaný sled* v digrafu  $\vec{G} = (V, H)$  je libovolná střídavá posloupnost vrcholů a hran ve tvaru

$$\mu(v_1, v_k) = (v_1, (v_1, v_2), v_2, (v_2, v_3), v_3, \dots, (v_{k-1}, v_k), v_k). \quad (2.8)$$

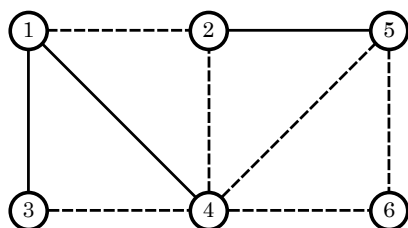
Jak již bylo zmíněno, z definice sledu a orientovaného sledu můžeme odvodit následující dvojici pojmů: **tah** a **cestu**. **Tah**, resp. **orientovaný tah** je takový sled v grafu  $G$ , resp. digrafu  $\vec{G}$ , ve kterém se neopakuje žádná hrana.

**Cesta**, resp. **orientovaná cesta** je takový sled v grafu  $G$ , resp. digrafu  $\vec{G}$ , ve kterém se neopakuje žádný vrchol. Příklady sledu, tahu a cesty jsou zachyceny postupně na níže uvedených obrázcích č. 2.3 až 2.5.



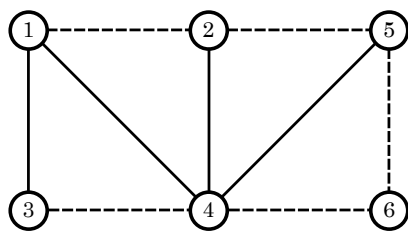
**Obrázek 2.3** 1-3 sled: (1-2-4-6-5-2-4-3).

*Zdroj: Vlastní zpracování*



**Obrázek 2.4** 1-3 tah: (1-2-4-6-5-4-3).

*Zdroj: Vlastní zpracování*



**Obrázek 2.5** 1–3 cesta: (1-2-5-6-4-3).

*Zdroj: Vlastní zpracování*

**Definice 2.11.** *Uzavřený sled*, resp. *uzavřený tah* je takový sled, resp. tah pro který platí, že počáteční vrchol je zároveň vrcholem koncovým, tedy:

$$\mu(u, v) = (v_1, h_1, v_2, h_2, \dots, v_{k-1}, h_{k-1}, v_k), \quad v_1 = v_k \quad (2.9)$$

V opačném případě se sled, resp. tah  $\mu(u, v)$  nazývá otevřený.

**Definice 2.12.** *Cyklus* je uzavřený tah (orientovaný tah), ve kterém se mimo počáteční a koncový vrchol žádný vrchol neopakuje.

Již bylo uvedeno, že reálné dopravní sítě budou zastoupeny strukturami v podobě grafů a digrafů, resp. migrafů. Podobně jako je možné setkat se v reálné dopravní síti s existencí jednosměrné pozemní komunikaci, i v teorii grafů má tato forma svou reprezentaci v podobě orientované hrany, která je propustná pouze souhlasně s její orientací. Aby bylo v teorii grafů zajištěno, že cestování v digrafech bude realizováno s ohledem na tuto skutečnost, je nutné definovat, co je rozuměno termíny souvislosti grafu a digrafu.

**Definice 2.13.** Graf  $G = (V, H)$  je **souvislý**, pokud pro každou dvojici vrcholů  $u, v \in V$  existuje  $u - v$  cesta. V opačném případě je graf  $G$  **nesouvislý**.

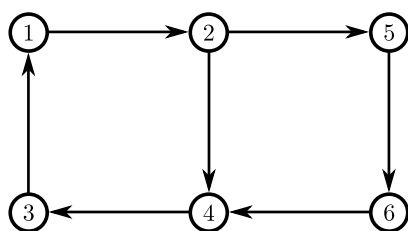
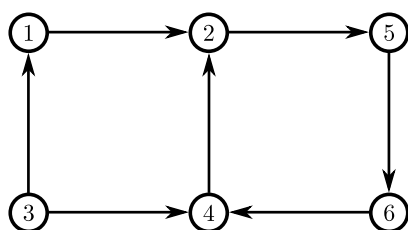
Specifickým příkladem souvislého grafu je tzv. kružnice, pravidelný graf 2. stupně. Platí, že kružnice o „ $n$ “ vrcholech má „ $n$ “ hran.

**Definice 2.14.** Digraf  $\vec{G}$  je **orientovaně souvislý**, pokud pro každou dvojici vrcholů  $u, v \in V$  existuje v  $\vec{G}$   $u - v$  sled anebo  $v - u$  sled.

**Definice 2.15.** Digraf  $\vec{G}$  je **silně souvislý**, pokud pro každou dvojici vrcholů  $u, v \in V$  existuje jak orientovaný  $u - v$  sled, tak orientovaný  $v - u$  sled.

Příklady souvislosti digrafů jsou zachyceny v diagramech na obrázcích č. 2.6 a 2.7.

Tímto byla představena první ze dvou teoretických oblastí, ze kterých se v práci vychází a lze přistoupit k druhé teoretické části, kterou je matematické programování.

**Obrázek 2.6** Silně souvislý digraf.*Zdroj: Vlastní zpracování***Obrázek 2.7** Orientovaně souvislý digraf.*Zdroj: Vlastní zpracování*

### 2.2.2 Matematické programování

Matematické programování (také optimalizace) je odvětví operačního výzkumu, jež se začalo formulovat v 50. a 60. letech 20. století s rozvojem výpočetní techniky. Hlavním předmětem matematického programování je řešení optimalizačních úloh. Úloh, ve kterých je hledán extrém (maximum, resp. minimum) daného kritéria, formulovaného kritériální funkcí  $n$  proměnných, na přípustné množině variant určených omezujícími podmínkami (Jablonský, 2007).

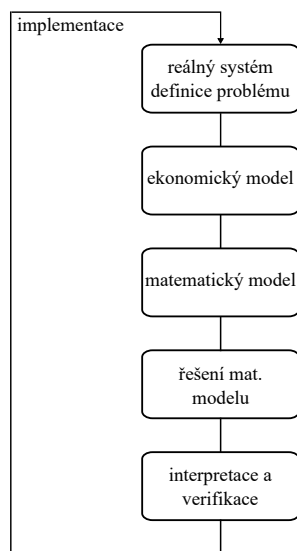
Oblasti využití této vědní disciplíny jsou široké. Jedná se zejména o ty oblasti, ve kterých dochází k procesu rozhodování, např. plánování výroby, optimalizace porfotlia apod. V souvislosti s touto prací je matematické programování využíváno také v logistice. Při řešení takovýchto rozhodovacích problémů je podle Jablonského (2007) rozlišováno několik základních fází:

1. Prvním krokem k aplikaci modelů je identifikace reálného problému a jeho definování. V tomto kroku je velmi důležitá role vedoucích pracovníků, jejichž úkolem je rozpoznat reálný problém a správně jej definovat. Je důležité vymezit, jak lze model zjednodušit tak, aby stále odpovídal realitě a zároveň nebyl příliš komplikovaný.
2. Druhým krokem je formulace ekonomického modelu řešeného problému. Jedná se o zjednodušující popis reálného systému, obsahující nejpodstatnější prvky a vazby mezi nimi. V rámci tohoto kroku je nejprve nutné stanovit cíl analýzy, může se jednat např. o maximalizaci zisku, minimalizaci nákladů apod. Dále je nutné popsat procesy, které v systému figurují a činitele, ovlivňující provádění procesů. Zatímco

procesy představují reálné aktivity, např. výrobu nějakého výrobku, činitelem je rozuměna např. omezená spotřeba zdrojů při výrobě určitého výrobku. V poslední řadě jsou popsány vztahy mezi výše uvedenými prvky modelu.

3. Třetím krokem je formulace matematického modelu řešeného problému. Jedná se o převedení ekonomického modelu do matematické podoby tak, aby byl řešitelný standardními postupy. Jednotlivé části ekonomického modelu jsou tak převedeny na parametry, funkce, proměnné, rovnice a nerovnice a také na síťové grafy. Matematická formulace modelu bude však podrobněji popsána níže.
4. Následující krok spočívá v samotném řešení matematického modelu. Ten lze řešit pomocí příslušných softwarových programů a adekvátně zvolenými postupy, resp. metodami.
5. Předposlední krok spočívá v interpretaci získaných výsledků a ověření jejich správnosti jak z hlediska ekonomického, tak matematického. Verifikací je zde především rozuměno ověření správnosti sestaveného modelu a posouzení reálnosti získaných výsledků. Objeví-li se ve verifikaci nesrovnalosti, je nutné vrátit se k předchozímu kroku či ke kroku počátečnímu.
6. Nakonec je za předpokladu správného sestavení modelu provedena implementace získaných výsledků.

Uvedené fáze rozhodovacího problému lze rovněž znázornit pomocí diagramu:



**Obrázek 2.8** Jednotlivé fáze rozhodovacího procesu.

*Zdroj: Jablonský (2007, str. 11), vlastní zpracování.*

V souvislosti se třetím uvedeným bodem lze konstatovat, že základním pracovním nástrojem matematického programování je matematický model, který je abstrakcí reálného

problému. Ten je s využitím matematického programování řešen. Matematický model lze podle Jablonského (2007) zapsat následovně:

$$\text{Min (Max)} \ z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.10)$$

za podmínek

$$\begin{aligned} a_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &\geq 0 \\ a_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &\geq 0 \\ &\vdots \\ a_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$x_j \geq 0, \text{ pro } j = 1, \dots, n \quad (2.12)$$

kde  $n$  je počet proměnných modelu,  $m$  je počet omezujících podmínek a  $x_j$  představuje  $j$ -tou proměnnou. Rovnice 2.10 představuje již zmíněnou účelovou funkci (optimalizační kritérium) o  $n$  proměnných, podmínky 2.11 představují strukturální omezení a podmínky 2.12 představují množinu obligatorních podmínek.

Matematické programování je v základním rozlišování děleno na lineární a nelineární. V případě, že je kritériální funkce a všechny rovnice a nerovnice v modelu lineární, jedná se o úlohy lineárního programování. V opačném případě, kdy je alespoň jedna funkce nelineární, jedná se o nelineární programování. V praktické části práce je využito právě lineárního programování a je mu tudíž věnována zvýšená pozornost.

Základním nástrojem lineárního programování je lineární matematický model. Tento model se skládá ze zmíněné kritériální funkce, množiny strukturálních a obligatorních podmínek ve tvaru lineárních rovnic, resp. nerovnic. Jablonský (2007) uvádí obecnou podobu lineárního matematického modelu následovně:

$$\text{Min (Max)} \ z = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \quad (2.13)$$

za podmínek

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq b_i, \text{ pro } i = 1, \dots, m \quad (2.14)$$

$$x_j \geq 0, \text{ pro } j = 1, \dots, n \quad (2.15)$$

kde  $n$  představuje počet strukturálních proměnných,  $m$  počet vlastních omezení,  $c_j$  je cenový koeficient  $j$ -té proměnné,  $b_i$  hodnota pravé strany  $i$ -tého omezení a  $a_{ij}$  strukturální koeficient mezi  $i$ -tým činitelem a  $j$ -tým procesem.

Lineární mnohočlen 2.13 představuje účelovou (kritériální) funkci a množina lineárních nerovnic 2.14 je označována jako vlastní omezující podmínky. Mimo vlastních omezení jsou definovány podmínky nezápornosti 2.15, které zajišťují nezápornost proměnných. To proto, že z hlediska ekonomické interpretace nemohou proměnné nabývat záporných hodnot (objem produkce, investic apod.) a linerání programování zároveň neumožňuje zápornost proměnných.

Ve výše uvedené podobě lineárního modelu byla veškerá vlastní omezení uvedena nerovnicemi typu menší nebo rovno ( $\leq$ ), nicméně mohou být uvedeny nerovnicemi typu opačného, tedy větší nebo rovno ( $\geq$ ) anebo samotnými rovnicemi.

V rámci lineárního programování existuje celá řada typů úloh. Fábry (2011, s. 36) tyto úlohy rozděluje do několika kategorií na úlohu výrobního plánování, směšovací a nutriční problém, řeznou úlohu, optimalizaci portfolia, přiřazovací problém a dopravní problém.

Do poslední uvedené skupiny úloh patří trasovací úlohy, které jsou předmětem této práce a o kterých pojednává následující podkapitola č. 3.1. Při řešení dopravního problému je předmět rozhodování možné rozdělit do dvou kategorií:

1. Odkud, kam, jaké množství – zde je pozornost věnována pouze výchozímu a koncovému vrcholu.
2. Po jaké trase – zde je pozornost věnována podrobné posloupnosti vrcholů představující výslednou trasu.

To vše při stanoveném optimalizačním kritériu, kterým může být např. minimalizace nákladů, minimalizace ujeté vzdálenosti, maximalizace zisku z přepravy apod.

Do první uvedené skupiny je řazena např. prostá, vícekomoditní a násobná dopravní úloha a dopravní úloha se ztrátami, kontejnery a fixní sazbou.

Protože jsou trasovací úlohy podrobně popsány v následujících kapitolách, bude zde pro názornost představeno řešení jedné z klasických dopravních úloh, úloh z první skupiny dopravního problému. Řešení bude ukázáno na úloze s přebytkem kapacit, jejíž zadání je popsáno v příkladu č. 2.1.

Protože se jedná o malou a nenáročnou úlohu, bude její výpočet představen v nástroji Řešitel programu MS Excel. Následně bude řešení realizováno v programu Xpress-IVE, který je použit pro hlavní výpočty v této práci.

**Příklad 2.1.** *Šest specializovaných pneuservisů požaduje dodávku pneumatik. Zboží je možné dodat ze tří distribučních center, které leží v dosahu 20 - 60 km od sídla konkrétního pneuservisu. Cílem je naplánovat dopravu zboží z distribučních center k zákazníkům tak, aby byla minimalizována celková ujetá vzdálenost, kterou je nutné při obsluze zákazníků ujet.*

Do výpočtů vstupují data uvedená v tabulkách č. 2.3, 2.4 a 2.5. Tato vstupní data budou nyní popsána.

Tabulka č. 2.3 představuje kapacity zdrojů distribučních center  $a_i$  v kusech pneumatik, kde  $i = 1, \dots, m$ .

**Tabulka 2.3** Vstupní data příkladu č. 2.1 – Zdroje.

Zdroje - distribuční centra	
Zdroj $D_i$	Kapacita $a_i$ [ks]
D1	80
D2	120
D3	30

*Zdroj: Vlastní zpracování.*

Tabulka č. 2.4 shrnuje požadavky zákazníků  $b_j$ , kde  $j = 1, \dots, n$  v kusech pneumatik.

**Tabulka 2.4** Vstupní data příkladu č. 2.1 – Zákazníci.

Zákazníci	
Zákazník $Z_j$	Požadavek $b_j$ [ks]
Z1	30
Z2	20
Z3	16
Z4	40
Z5	26
Z6	32

*Zdroj: Vlastní zpracování.*

Do výpočtu dále vstupují data, představující vzdálenost mezi  $i$ -tým distribučním centrem a  $j$ -tým zákazníkem v kilometrech. Jedná se o matici vzdáleností s prvky  $d_{ij}$ , která je uvedena v tabulce č. 2.5.



**Tabulka 2.5** Matice vzdálenosti vzorového příkladu č. 2.1.

Matice vzdálenosti $d_{ij}$						
	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Z6
D1	39	47	45	24	33	50
D2	20	31	35	59	45	55
D3	43	24	41	35	49	56

*Zdroj: Vlastní zpracování.*

Nyní bude představen lineární matematický model, který lze pro řešení příkladu č. 2.1 použít. Tento model má podle Janáčka (2003) tvar:

$$\text{Min} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} \cdot d_{ij} \quad (2.16)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \text{ pro } j = 1, \dots, n \quad (2.17)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \text{ pro } i = 1, \dots, m \quad (2.18)$$

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}_0^+, \text{ pro } i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n \quad (2.19)$$

Účelová funkce 2.16 představuje celkovou vzdálenost, kterou je nutné při obsluze ujet. Proměnná  $x_{ij}$  představuje množství zboží, které bude přepraveno v relaci mezi  $i$ -tým zdrojem a  $j$ -tým zákazníkem a může nabývat hodnot z množiny  $\mathbb{Z}_0^+$ . Podmínky 2.17 zabezpečují, že požadavek každého zákazníka  $b_j$  bude naplněn. Podmínky 2.18 zabezpečují, že nebude překročena kapacita zdrojů  $a_i$ . Podmínky 2.19 jsou obligatorní podmínky a vymezují definiční obor proměnných  $x_{ij}$ .

Nyní lze přistoupit k řešení matematického modelu 2.16 – 2.19. V první řadě bude řešení realizováno s využitím výpočetního prostředí MS Excel–Řešitel. Postup výpočtu lze shrnout do několika kroků:

1. Příprava tabulky pro proměnné  $x_{ij}$ .
2. Příprava tabulky pro prvky účelové funkce  $x_{ij} \cdot d_{ij}$ .
3. Zadání strukturálních podmínek.
4. Zadání obligatorních podmínek.
5. Určení typu extrému účelové funkce.
6. Nastavení parametrů optimalizace Simplexovou metodou.

## 7. Spuštění výpočtu.

Nastavení parametrů v nástroji Řešitel zachycuje obrázek č. 2.9.

**Obrázek 2.9** Nastavení parametrů nástroje Řešitel pro optimalizaci vzorového příkladu č. 2.1 v rozhraní programu Excel.

*Zdroj: Vlastní zpracování.*

Řešení příkladu č. 2.1 je shrnuto v tabulce č. 2.6, kde je uvedena matice proměnných, jejíž prvky  $x_{ij}$  byly obdrženy optimalizací Simplexovou metodou v nástroji Řešitel. Tyto prvky představují množství dodaného zboží z  $i$ -tého distribučního centra  $j$ -tému zákazníkovi.

Provedenou optimalizací byly obdrženy prvky matice účelové funkce a hodnota účelové funkce, která představuje celkovou ujetou vzdálenost, která činí **5148 km**. Hodnota účelové funkce neodpovídá zcela realitě, kdy jsou pneumatiky k jednotlivým zákazníkům distribuovány v dávkách. Pro tento ilustrační příklad bude však toto zjednodušení ponecháno. Výsledné hodnoty jsou uvedeny v tabulce č. 2.7.

Nyní, když bylo představeno řešení klasické dopravní úlohy s přebytkem kapacit v nástroji Řešitel programu MS Excel, bude stejný příklad názorně vypočten ve výpočetním prostředí Xpress-IVE. Nejprve bude popsána implementace matematického modelu 2.16 – 2.19 do jazyka Mosel, který výpočetní prostředí Xpress-IVE používá.

V záhlaví modelu byly nastaveny informace o názvu modelu a obligatorní údaje pro optimalizaci.

**Tabulka 2.6** Matice proměnných vzorového příkladu č. 2.1.

Matice proměnných $x_{ij}$							
	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Z6	SUMA
D1	0	0	0	40	26	14	80
D2	30	0	16	0	0	18	64
D3	0	20	0	0	0	0	20
SUMA	30	20	16	40	26	32	

*Zdroj: Vlastní zpracování.*

**Tabulka 2.7** Matice účelové funkce vzorového příkladu č. 2.1.

Matice účelové funkce $x_{ij} * d_{ij}$							
	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Z6	
D1	0	0	0	960	858	700	
D2	600	0	560	0	0	990	
D3	0	480	0	0	0	0	
Účelová funkce		5148					

*Zdroj: Vlastní zpracování.*

```
! Záhlaví modelu *****
model prikklad_2.1      ! Název modelu
uses 'mmxprs';          ! Výběr modulů
! *****
```

Další krok spočíval v zavedení konstant a proměnných modelu pomocí příkazu *declarations*. V tomto deklaračním bloku jsou definovány konstanty a proměnné vstupující do matematického modelu. Nejprve byl definován rozsah množiny zdrojů  $zdr = (1, \dots, 3)$  a rozsah množiny zákazníků  $zak = (1, \dots, 6)$ . Následně byly definovány množiny konstant  $d_{ij}$ ,  $a_i$ ,  $b_j$  a množina proměnných  $x_{ij}$ . Množina konstant  $d_{ij}$  deklaruje vzdálenost mezi  $i$ -tým zdrojem a  $j$ -tým zákazníkem. Množina konstant  $a_i$  modeluje kapacity zdrojů a množina  $b_j$  požadavky zákazníků. Množina proměnných  $x_{ij}$  modeluje přepravované množství mezi  $i$ -tým zdrojem a  $j$ -tým zákazníkem. Příkazem *end-declarations* bylo definování proměnných a konstant uzavřeno.

```

! Deklarování konstant a proměnných *****
declarations
zdr=1..3                ! Počet zdrojů
zak=1..6                ! Počet zákazníků

d: array (zdr, zak) of real    ! Množina konstant dij
x: array (zdr, zak) of mpvar   ! Množina proměnných xij
a: array (zdr) of real        ! Množina konstant ai
b: array (zak) of real        ! Množina konstant bj
end-declarations
! *****

```

Prostřednictvím příkazu *initializations from* byly načteny matice konstant  $a_i$ ,  $b_j$  a  $d_{ij}$  z datového souboru ve formátu textového souboru. Jak je z níže uvedeného výpisu zřejmé, i zde bylo nutné proces inicializace příkazově otevřít a uzavřít.

```

! Načtení konstant z datového souboru *****
initializations from 'data_soubor.txt'
a; b; d;
end-initializations
! *****

```

Následně byl zapsán matematický model, který se skládá z účelové funkce, strukturálních a obligatorních podmínek. Jak již bylo uvedeno, účelová funkce je zde minimalizována a představuje celkovou ujetou vzdálenost, kterou je při obsluze zákazníků nutné ujet, v kilometrech.

První omezující podmínkou je zajištěno, že veškeré požadavky pneuservisů na dodávky pneumatik budou uspokojeny. Druhá omezující podmínka zajišťuje, že nebudou překročeny kapacity distribučních center. Poslední podmínkou je obligatorní podmínka definující nezápornost proměnných. Příkazem *minimize* je realizován výběr extrému účelové funkce.

```

! Matematický model *****
vzdalenost:=sum(i in zdr, j in zak)x(i,j)*d(i,j)    ! Účelová funkce
forall(j in zak) sum(i in zdr)x(i,j)=b(j)          ! Strukturální OP
forall(i in zdr) sum(j in zak)x(i,j)<=a(i)          ! Strukturální OP
forall(i in zdr, j in zak)x(i,j) is_integer        ! Obligatorní OP
minimize(vzdalenost)                                ! Příkaz optimalizace
! *****

```

V posledním kroku byl nastaven výpis výstupů a celý model uzavřen příkazem *end-model*.

```
! Výpis výstupů *****
writeln ( ''Celková ujetá vzdálenost ='' , getobjval, '' km'')
writeln (''')
writeln (''Přiřazení skladů zákazníkům je následující: '')
writeln (''')
forall (i in zdr, j in zak|getsol (x(i,j)) >0)
writeln (''x('',i,','',j,') = '', getsol (x(i,j)))

end-model
```

Řešením matematického modelu 2.16 – 2.19 ve výpočetním prostředí Xpress-IVE bylo obdrženo řešení v následujícím tvaru:

Celková ujetá vzdálenost = 5148 km

Přiřazení skladů zákazníkům je následující:

```
x(1,4) = 40
x(1,5) = 26
x(1,6) = 14
x(2,1) = 30
x(2,3) = 16
x(2,6) = 18
x(3,2) = 20
```

Celková vzdálenost, kterou je potřeba pro dodání zboží zákazníkům ujet, činí **5148 km**. Z distribučního centra 1 bude dodáno 40 pneumatik zákazníkovi číslo 1, 26 pneumatik zákazníkovi číslo 5 a 14 pneumatik zákazníkovi číslo 6. Z distribučního centra 2 bude dodáno 30 pneumatik zákazníkovi číslo 1, 16 pneumatik zákazníkovi číslo 3 a 18 pneumatik zákazníkovi číslo 6. Z distribučního centra číslo 3 bude dodáno 20 pneumatik zákazníkovi číslo 2. Veškeré požadavky zákazníků budou uspokojeny při respektování kapacit distribučních center a požadavku minimalizace ujeté vzdálenosti.

V závěru této kapitoly je důležité zmínit, že řešení úloh lineárního programování je v mnoha případech nemožné bez pomoci použití počítače a počítačových programů. V současnosti je nabídka programů široká. Jsou dostupné jak programy jednodušší, které jsou schopné řešit úlohy s malým počtem omezujících podmínek a strukturních proměnných, tak profesionální programy, umožňující řešit rozsáhlé a složité úlohy, obsahující až několik desítek tisíc proměnných a omezujících podmínek. Při takto rozsáhlých úlohách užití počítačových programů zamezuje nejen vzniku chyb, ale současně šetří náklady.

Mezi jednodušší programy, uváděné literaturou, patří např. program STORM, odbornější pak programy LINDO a LINGO. Jablonský (2007) a Fábry (2011) uvádějí také nástroj Řešitel programu MS Excel, který byl představen na vzorovém příkladu č. 2.1 výše.

Veškeré výpočty v této práci jsou provedeny v již představeném programu Xpress-IVE. Jedná se o grafické rozhraní programovacího jazyka Mosel, určené k formulaci modelů v operačních systémech MS Windows. Prostředí tohoto programu mimo jiné umožňuje také vizuální znázornění průběhu řešení a výsledku (Guerét, Prins a Sevaux, 2002). Jazyk Mosel se od klasických procedurálních jazyků liší především možností zadávání speciálních proměnných a funkcí sloužících k řešení optimalizačních úloh (FICO Xpress Optimization Suite, 2003).

Nyní, když bylo představeno matematické programování, bude v následující kapitole věnována pozornost sestavení matematických modelů a realizaci optimalizačních výpočtů.



## Kapitola 3

# Sestavení matematických modelů a vlastní realizace optimalizačních výpočtů

Dosud byly v práci představeny obě klíčové teoretické oblasti, ze kterých je vycházeno a lze tedy přistoupit k řešení problému, který je předmětem předložené práce.

Základní otázkou, na kterou je hledána odpověď je: jak naplánovat trasy obslužných vozidel, vykonávajících svoz separovaného odpadu tak, aby byla minimalizována celková ujetá vzdálenost a s ní spojené náklady na provoz těchto vozidel. Při hledání odpovědi na tuto otázku budou využity teoretické poznatky, týkající se trasovacích úloh.

### 3.1 Trasovací úlohy

Trasovací úlohy jsou úlohy, jejichž předmětem je optimalizace tras obslužných vozidel, jejichž kritériem optimality je celková ujetá vzdálenost vyjádřena v kilometrech. Tyto úlohy lze rozdělit na dvě základní skupiny:

- úlohy zaměřené na obsluhu vrcholů,
- úlohy zaměřené na obsluhu hran.

Oba typy těchto úloh lze řešit v podmínkách tří základních typů dopravních sítí, resp. grafů. Jedná se o:

- neorientovanou síť (graf),
- orientovanou síť (digraf),
- smíšenou síť (migraf).

Dále budou obě skupiny popsány a představeny na příkladech smíšených sítí (migrafech).

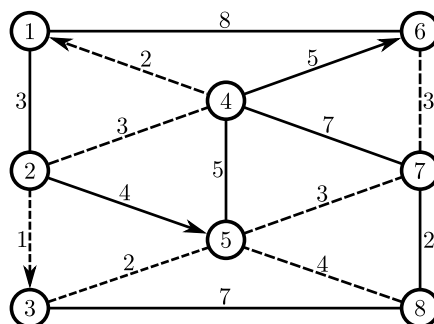


### 3.1.1 Obsluha vrcholu

V trasovacích úlohách, zaměřených na obsluhu vrcholů, je hledána optimální okružní jízda, resp. množina těchto okružních jízd. Výchozí úlohou je zde problém obchodního cestujícího (angl. Travelling Salesman Problem – TSP) nebo okružní problém. Tento typ úloh je v oblastech nakládání s odpadem často využíván pro řešení úlohy svozu separovaného odpadu či svozu nádob se specifickým odpadem. Cílem úlohy je nalezení minimální Hamiltonovy<sup>1</sup> kružnice (Jablonský 2007).

Matematický model této úlohy bude představen na vzorovém příkladu č. 3.1.

**Příklad 3.1.** Dopravní síť je reprezentována silně souvislým hranově ohodnoceným smíšeným grafem (migrafem)  $N = (V, H, l)$ . Tento graf, jehož diagram je zachycen na obrázku č. 3.1, má tři atributy.  $V = 1, \dots, n$  představuje množinu vrcholů,  $H = 1, \dots, m$  množinu hran a  $l_{ij}$  představuje ohodnocení hrany  $ij$ , kde  $i, j \in V$ .



Obrázek 3.1 Graf  $N = (V, H, l)$ .

Zdroj: Vlastní zpracování

Cílem úlohy obchodního cestujícího je nalezení uzavřené okružní cesty s minimální délkou, která obsahuje všechny vrcholy (cílová místa)  $n$  z množiny  $V$  právě jednou a začíná a končí v depu, které je situováno v počátečním vrcholu 1.

Matice ohodnocení hran  $l_{ij}$  je uvedena v tabulce č. 3.1 a je možné si povšimnout, že není symetrická, což odpovídá skutečnosti existence orientovaných hran.

V první řadě je nutné vypočítat matici vzdáleností  $d_{ij}$  mezi jednotlivými vrcholy grafu. Matice vzdáleností  $d_{ij}$  bude obsahovat délky nejkratších cest mezi všemi dvojicemi vrcholů  $i, j \in V, i \neq j$ . Tuto matici lze vypočítat s použitím vhodného algoritmu (např. Dijkstrův algoritmus, Floyd-Warshallův algoritmus, apod.). V tomto případě byla matice vzdáleností  $d_{ij}$  vypočtena s využitím Floyd-Warshallova algoritmu, který byl implementován ve výpočetním prostředí Wolfram Mathematica. Matice vzdáleností je zachycena v tabulce č. 3.2.

<sup>1</sup>Sir W. R. Hamilton (1805–1865) byl irský matematik, fyzik a astronom, který se mj. zabýval hledáním cest v grafech.

**Tabulka 3.1** Matice ohodnocení hran  $l_{ij}$  migrafu  $N = (V, H, l)$ .

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-	3	-	-	-	8	-	-
2	3	-	1	3	4	-	-	-
3	-	-	-	-	2	-	-	7
4	2	3	-	-	5	5	7	-
5	-	-	2	5	-	-	3	4
6	8	-	-	-	-	-	3	-
7	-	-	-	7	3	3	-	2
8	-	-	7	-	4	-	2	-

*Zdroj: Vlastní zpracování.***Tabulka 3.2** Matice vzdáleností  $d_{ij}$  migrafu  $N = (V, H, d)$ .

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	3	4	6	6	8	9	10
2	3	0	1	3	3	8	6	7
3	9	10	0	7	2	8	5	6
4	2	3	4	0	5	5	7	9
5	7	8	2	5	0	6	3	4
6	8	11	8	10	6	0	3	5
7	9	10	5	7	3	3	0	2
8	11	12	6	9	4	5	2	0

*Zdroj: Vlastní zpracování.*

Je možné si povšimnout, že zatímco v matici ohodnocení hran  $l_{ij}$  nejsou uvedeny údaje pro všechny relace  $i, j \in V$ , v matici vzdáleností  $d_{ij}$  tomu tak je. Odpovídá to již zmíněné skutečnosti existence orientovaných hran. Například z vrcholu 4 do vrcholu 6 vede orientovaná hrana s hodnotou  $l_{46} = 5$  jednotek. Proti směru orientace této hrany nelze cestovat, což odpovídá skutečnosti, že hodnota  $l_{64} =$  neexistuje. To, že však nelze proti směru orientace hrany cestovat neznamená, že z vrcholu 6 do vrcholu 4 neexistuje cesta. O existenci této cesty informuje matice vzdáleností  $d_{ij}$ , kde hodnota  $d_{64} = 10$  jednotek. Jedná se o délku nejkratší cesty z vrcholu 6 přes vrchol 7 do vrcholu 4.

Nyní je možné formulovat matematický model pro vyhledání minimální Hamiltonovy kružnice. Tento model má podle Janáčka (2006) tvar:

$$\text{Min} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} \cdot d_{ij} \quad (3.1)$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n x_{ij} = 1, \text{ pro } j = 1, \dots, n \quad (3.2)$$

$$\sum_{\substack{k=1 \\ j \neq k}}^n x_{jk} = 1, \text{ pro } j = 1, \dots, n \quad (3.3)$$

$$y_j - y_i + n \cdot x_{ij} \leq n - 1, \text{ pro } i = 2, \dots, n, j = 2, \dots, n, i \neq j \quad (3.4)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \text{ pro } i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n, i \neq j \quad (3.5)$$

$$y_i \in \mathbb{Z}_0^+, \text{ pro } i = 2, \dots, n \quad (3.6)$$

Binární proměnná  $x_{ij}$ , představuje zařazení, resp. nezařazení hrany  $ij$  do trasy. Leží-li trasa z místa  $i$  do místa  $j$  na hledané cestě, pak stanovíme  $x_{ij} = 1$ , v opačném případě  $x_{ij} = 0$ . To lze také zapsat způsobem:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{hrana bude zařazena do trasy} \\ 0 & \text{hrana nebude zařazena do trasy.} \end{cases} \quad (3.7)$$

Účelová funkce 3.1 vyjadřuje celkovou délku trasy, která je v modelu minimalizována. Podmínky 3.2 a 3.3 zabezpečují to, že do každého vrcholu vstoupí a zároveň z každého vrcholu vystoupí právě jedna hrana. Podmínky 3.4 představují anticyklické podmínky zamezující uzavření Hamiltonovy kružnice dříve, než jsou zahrnuty všechny vrcholy. Podmínky 3.5 a 3.6 vymezují definiční obor proměnných  $x_{ij}$  a pomocných proměnných  $y_i$ .

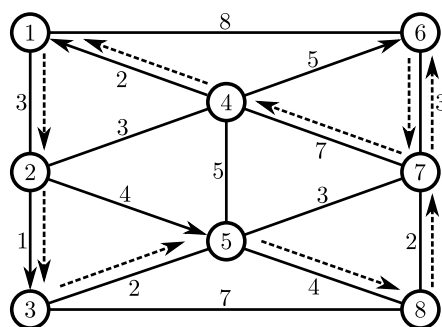
Aplikováním modelu na vzorovém příkladu č. 3.1 byla vyhledána minimální Hamiltonova kružnice. Získané optimální řešení odpovídá posloupnosti vrcholů (1-2-3-5-8-7-6-7-4-1) s celkovou délkou 27 km. Výsledné řešení je zachyceno na obrázku č. 3.2.

V souvislosti s výše uvedeným je nakonec odkázáno na Dasgupta, Papadimitrouho a Vaziraniho (2006), kteří řadí problém TSP do tzv. NP-úplných (angl. nondeterministic polynomial time) úloh. Jedná se o úlohy, jejichž řešení je nepolynomiální<sup>2</sup>. Devlin (2005, s. 17) popisuje problematiku těchto úloh následovně: „*To co dělá problém skoro neřešitelným, je prostě jen čirý počet všech možností, které je třeba prozkoumat, a pro které je nutno onen extrémně jednoduchý výpočet zopakovat*“.

Po seznámení se s problematikou trasovacích úloh zaměřených na obsluhu vrcholu, bude nyní věnována pozornost na předmět této práce, což jsou trasovací úlohy zaměřené na obsluhu hran.

---

<sup>2</sup>„Časová náročnost řešení reálných úloh je neakceptovatelná“ (Kozel, Friedrich a Michalcová, 2007).



**Obrázek 3.2** Optimální řešení příkladu 3.1 (1-2-3-5-8-7-6-7-4-1).

*Zdroj: Vlastní zpracování*

### 3.1.2 Obsluha hran

V úlohách, zaměřených na obsluhu hran, je hledán optimální tah, prostřednictvím kterého lze realizovat obsluhu všech hran s minimální ujetou vzdáleností. Dle charakteru úlohy je hledán optimální otevřený tah, resp. uzavřený tah<sup>3</sup>. V praxi často tento typ úloh představuje problematiku obsluhy a údržby pozemních komunikací, jako např. chemický posyp, úklid sněhu, ale také svoz zátěže situované podél pozemní komunikace.

Cílem úlohy o obsluze hran je nalézt takovou trasu, která obsahuje každou hranu alespoň jednou, začíná a končí v depu a její délka je minimální.

Výchozí úlohou pro řešení tohoto problému je tzv. „Úloha čínského listonoše“ (angl. Chinese Postman Problem – CPP). Poprvé byla zformulována čínským matematikem Mei-Ko-Kuanem v roce 1962. Úkolem listonoše je obsloužit všechny ulice města tak, aby při své roznáškové činnosti urazil minimální vzdálenost, přičemž výchozím i cílovým bodem je poštovní středisko.

Pro řešení úlohy čínského listonoše je využíváno teoretických poznatků o existenci Eulerova tahu, kterému bude nyní věnována pozornost. V první řadě je nutné definovat, co je rozuměno Eulerovým tahem.

**Definice 3.1.** Eulerův tah  $t(u, v)$  v souvislém grafu  $G$  je takový tah, který obsahuje všechny hrany grafu  $G$ .

**Definice 3.2.** Eulerův tah  $t(u, v)$  v silně souvislém digrafu  $\vec{G}$  je takový orientovaný tah, který obsahuje všechny orientované hrany digrafu  $\vec{G}$ .

Nyní je potřeba popsat, jak lze poznat, zda daný graf, resp. digraf obsahuje uzavřený Eulerův tah. Definice, které vymezují okolnosti, za kterých lze tvrdit, že graf, resp. digraf obsahuje uzavřený Eulerův tah, vyplývají z vět, které formuloval L. Euler v roce 1736 (Palúch, 2008).

<sup>3</sup>Viz definice č. 2.11.

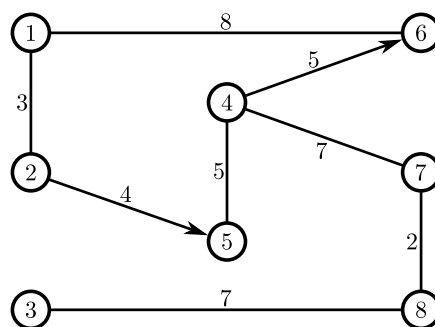
**Definice 3.3.** Souvislý graf  $G = (V, H)$  obsahuje uzavřený Eulerův tah, právě tehdy když jsou stupně všech vrcholů v grafu  $G$  sudé.

**Definice 3.4.** Silně souvislý digraf  $\vec{G} = (V, H)$  obsahuje orientovaný Eulerův tah, pokud pro každý jeho vrchol  $v$  platí, že  $\text{iddeg}(v) = \text{odeg}(v)$ .

Pokud graf, resp. digraf splňuje podmínky existence Eulerova tahu, je možné tento tah vyhledat. K vyhledávání uzavřeného Eulerova tahu je možné použít některý z vhodných algoritmů, jako například Fleuryho algoritmus<sup>4</sup>. Za předpokladu, že nejsou splněny podmínky existence uzavřeného Eulerova tahu, resp. uzavřeného Eulerova orientovaného tahu, je nutné zvolit náhradní postup. Některé z hran budou v tahu zařazeny opakovaně. Cílem je pak vybrat hrany, které budou do tahu opakovaně zařazeny tak, aby výsledná celková délka tahu byla minimální. Skutečnost, kdy graf, resp. digraf nesplňuje podmínky existence příslušného Eulerova tahu je v praxi běžná a opakované zařazení některých hran do tahu odpovídá neproduktivním průjezdům obslužných vozidel.

Základních postupů pro vyhledání Eulerova tahu, při nesplnění podmínek jeho existence, existuje vícero, např. Edmondsův algoritmus, který využívá princip minimálního párování. Dalším z náhradních postupů je přístup založený na určení počtu průjezdů jednotlivými hranami. Tento přístup bude nyní detailně představen a demonstrován na příkladu č. 3.2.

**Příklad 3.2.** Dopravní síť je reprezentována silně souvislým hranově ohodnoceným smíšeným grafem (migrafem)  $N_1 = (V_1, H_1, l)$ . Tento graf, jehož diagram je zachycen na obrázku č. 3.3, má tři atributy.  $V_1 = 1, \dots, n$  představuje množinu vrcholů,  $H_1 = 1, \dots, m$  množinu hran a  $l_{ij}$  představuje ohodnocení hrany  $ij$ , kde  $i, j \in V_1$ . Cílem je nalézt takovou trasu, resp. uzavřený orientovaný tah, který obsahuje každou hranu grafu alespoň jednou, začíná a končí v depu a jehož délka je minimální. Matice ohodnocení hran  $l_{ij}$  je uvedena v tabulce č. 3.3.



**Obrázek 3.3** Graf  $N_1 = (V_1, H_1, l)$ .

*Zdroj: Vlastní zpracování*

<sup>4</sup>Po drobných úpravách lze tento algoritmus použít i pro vyhledání uzavřeného Eulerova orientovaného tahu v digrafech splňujících podmínky jeho existence.

**Tabulka 3.3** Matice ohodnocení hran  $l_{ij}$  migrafu  $N_1 = (V_1, H_1, l)$ .

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-	3	-	-	-	8	-	-
2	3	-	-	-	4	-	-	-
3	-	-	-	-	-	-	-	7
4	-	-	-	-	5	5	7	-
5	-	-	-	5	-	-	-	-
6	8	-	-	-	-	-	-	-
7	-	-	-	7	-	-	-	2
8	-	-	7	-	-	-	2	-

Zdroj: Vlastní zpracování.

V první řadě je nutné zjistit, zda zadaný migraf obsahuje uzavřený orientovaný Eulerův tah. Pro zjištění existence příslušného Eulerova tahu lze vyjít z definic 3.3 a 3.4, které je pro situaci migrafu nutné zpřesnit.

Silně souvislý migraf obsahuje uzavřený orientovaný Eulerův tah, právě tehdy když jsou stupně všech vrcholů v migrafu sudé a zároveň pokud pro všechny vrcholy iniciující s orientovanými hranami platí:

$$ideg(v) \leq odeg(v).$$

Je zřejmé, že migraf z příkladu 3.2 tyto podmínky nesplňuje. Vrcholy č. 3 a č. 4 jsou lichého stupně<sup>5</sup>. Pro vyhledání uzavřeného orientovaného tahu je tedy nutné využít náhradní postup a určit, které z hran budou v tahu zařazeny opakovaně. K tomuto bude využit matematický model, jehož výstupem budou informace o tom, kolikrát bude příslušná hrana  $ij$  v tahu použita.

Do matematického modelu budou vstupovat pouze informace odpovídající matici hodnocení hran  $l_{ij}$ . Do této matice je nutné doplnit prohibitivní konstanty  $T$ , které budou zabránovat zařazení hrany do tahu proti směru její orientace (Kozel, Michalčová, 2015). Matice ohodnocení hran se zavedením prohibitivních konstant  $T$ , odpovídající příkladu 3.2, je uvedena v tabulce č. 3.4.

<sup>5</sup>Tento migraf splňuje podmínky otevřeného Eulerova tahu. Ten by však musel začínat v některém z vrcholů lichého stupně.

**Tabulka 3.4** Matice ohodnocení hran  $l_{ij}$  migrafu  $N_1 = (V_1, H_1, l)$  po zavedení prohibitivní konstanty  $T$ .

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-	3	-	-	-	8	-	-
2	3	-	-	-	4	-	-	-
3	-	-	-	-	-	-	-	7
4	-	-	-	-	5	5	7	-
5	-	T	5	-	-	-	-	-
6	8	-	-	T	-	-	-	-
7	-	-	-	7	-	-	-	2
8	-	-	7	-	-	-	2	-

*Zdroj: Vlastní zpracování.*

Nyní je již možné formulovat matematický model pro určení počtu průjezdů jednotlivými hranami:

$$\text{Min} \sum_{\substack{i=1 \\ \text{exists } l_{ij}}}^n \sum_{\substack{j=1 \\ \text{exists } l_{ij}}}^n l_{ij} \cdot z_{ij} \quad (3.8)$$

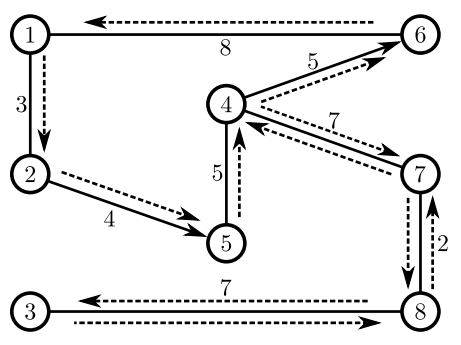
$$z_{ij} + z_{ji} \geq 1, \text{ pro } i, j = 1, \dots, n, \text{ kde exists } l_{ij} \quad (3.9)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ \text{exists } l_{ij}}}^n z_{ij} = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{exists } l_{ij}}}^n z_{ji}, \text{ pro } i, j = 1, \dots, n, \text{ kde exists } l_{ij} \quad (3.10)$$

$$z_{ij} \in \mathbb{Z}^+, \text{ pro } i, j = 1, \dots, n, \text{ kde exists } l_{ij} \quad (3.11)$$

Účelová funkce 3.8 představuje celkovou vzdálenost, kterou je potřeba při vyhledání Eulerova tahu ujet. Odpovídá celkové vzdálenosti, která bude při svozu komunálního odpadu ujeta. Proměnná  $z_{ij}$  je celočíselná proměnná, která představuje počet průjezdů hranou. Podmínka 3.9 zajišťuje, že každá existující hrana, bude v tahu alespoň jednou zařazena. Podmínka 3.10 zabezpečuje, že každý vrchol, který bude navštíven, bude následně opuštěn. Obligatorní podmínka 3.11 zajišťuje, že proměnná  $z_{ij}$  může nabývat pouze celých nezáporných čísel.

Aplikací matematického modelu 3.8 – 3.11 na příkladu č. 3.2 bylo obdrženo optimální řešení v podobě minimální trasy, skládající se z posloupnosti vrcholů (1-2-5-4-7-8-3-8-7-4-6-1). Vzdálenost celkové trasy činí 57 km. Hrany {4-7}, {7-8} a {8-3} budou použity právě dvakrát. Optimální řešení je zachyceno na obrázku č. 3.4.



**Obrázek 3.4** Optimální řešení příkladu č. 3.2 (1-2-5-4-7-8-3-8-7-4-6-1).

*Zdroj: Vlastní zpracování*

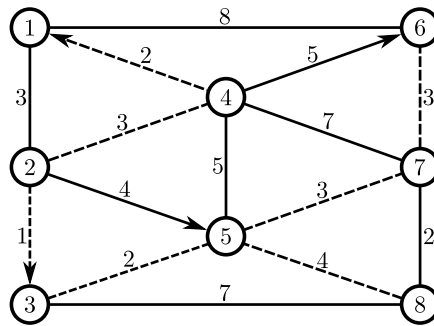
Je nutné zmínit skutečnost, že v reálných situacích se nelze setkat s existencí zcela izolované sítě. Většina dopravních sítí, vymezených k obsluze, jsou součástí větší sítě (nadsítě). Vymezíme-li síť jako dopravní infrastrukturu určitého města, pak lze podsít označit jako konkrétní množinu pozemních komunikací, určenou k obsluze. Definovaný cíl zůstává neměnný. Je nutné obsloužit požadovanou podsít tak, aby byla každá hrana navštívena alespoň jednou a celková ujetá trasa byla minimální. Ke splnění tohoto cíle lze využít hrany z nadsítě, přispějí-li k minimalizaci celkové ujeté trasy obslužných vozidel. Tento postup bude nyní představen na příkladu č. 3.3.

**Příklad 3.3.** Síť  $N(V, E, l)$  vymezuje smíšený hranově ohodnocený graf, jehož diagram je uveden na obrázku č. 3.5. Tato síť má znovu tři charakteristiky.  $V = 1, \dots, n$  představuje množinu vrcholů,  $H = 1, \dots, m$  množinu orientovaných a neorientovaných hran a  $l_{ij}$  ohodnocení hrany  $ij$ . Síť  $N$  lze dále rozdělit na dvě podsítě,  $N_1$  a  $N_2$ . První podsít  $N_1 = (V_1, H_1, l)$ , představuje množinu hran, které je nutné obsloužit. Druhá podsít  $N_2 = (V_2, H_2, l)$ , představuje množinu hran, které je možné využít. Platí tedy, že  $N = N_1 \cup N_2$ . Dále platí, že ohodnocení hran podsítě  $N_1$  je definováno prostřednictvím veličiny  $d_{ij} \subset l_{ij}$ . Ohodnocení hran podsítě  $N_2$  je definováno prostřednictvím veličiny  $e_{ij} \subset l_{ij}$ .

Úkolem je nálezení trasy, která bude procházet alespoň jednou každou hranou podsítě  $N_1$ . Zároveň může být využito hran podsítě  $N_2$ . Celková ujetá vzdálenost musí být minimální a zároveň musí trasa začínat a končit v depu (vrchol 1). Orientované hrany obou podsítí mohou být procházeny pouze souhlasně s orientací hrany.

Na uvedeném obrázku č. 3.5 je plnými čarami vyznačena podsít  $N_1$ , podsít  $N_2$  pak čárkovanými čarami. Pro řešení problému popsaneho v příkladu č. 3.3 lze využít matematický model, který bude nyní představen.





**Obrázek 3.5** Síť  $N$  s vyznačením podsítí  $N_1$  a  $N_2$  odpovídající zadání příkladu č. 3.3.

*Zdroj: Vlastní zpracování*

Matematický model, zohledňující výše popsanou skutečnost, je rozšířením předešlého modelu o zmíněnou možnost využití hran z nadsítě. Takto definovaný model má podle Kozla a Michalcové (2015) následující podobu:

$$\text{Min} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ \text{exists } d_{ij}}}^n d_{ij} \cdot z_{ij} + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ \text{exists } e_{ij}}}^n e_{ij} \cdot y_{ij} \quad (3.12)$$

$$z_{ij} + z_{ji} \geq 1, \text{ pro } i, j = 1, \dots, n, \text{ kde exists } d_{ij} \quad (3.13)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ \text{exists } d_{ij}}}^n z_{ij} + \sum_{\substack{j=1 \\ \text{exists } e_{ij}}}^n y_{ij} = \sum_{\substack{j=1 \\ \text{exists } d_{ji}}}^n z_{ji} + \sum_{\substack{j=1 \\ \text{exists } e_{ji}}}^n y_{ji}, \text{ pro } i = 1, \dots, n \quad (3.14)$$

$$z_{ij} \in \mathbb{Z}^+, \text{ pro } i, j = 1, \dots, n, \text{ kde exists } d_{ij} \quad (3.15)$$

$$y_{ij} \in \mathbb{Z}^+, \text{ pro } i, j = 1, \dots, n, \text{ kde exists } e_{ij} \quad (3.16)$$

Účelová funkce 3.12 představuje celkovou vzdálenost, která je v modelu minimalizována.

První část účelové funkce představuje celkovou ujetou vzdálenost při obsluze hran podsítě  $N_1$ , druhá část vyjadřuje celkovou ujetou vzdálenost využitím hran podsítě  $N_2$ . Značení  $z_{ij}$  představuje celočíselnou proměnnou, která vyjadřuje počet průjezdů hranami podsítě  $N_1$ . Proměnná  $y_{ij}$  je celočíselná proměnná, která modeluje počet průjezdů hranami podsítě  $N_2$ . Podmínky 3.13 určují, že do trasy bude alespoň jednou zařazena každá existující hrana podsítě  $N_1$ . Podmínky 3.14 zajišťují to, že každý vrchol bude po navštívení následně opuštěn. Podmínky 3.15 a 3.16 jsou obligatorní a zabezpečují, že proměnné  $z_{ij}$  a  $y_{ij}$  nabývají pouze celých nezáporných čísel.

Po představení matematického modelu 3.12 – 3.16 lze nyní přistoupit k popisu zpracování vstupních dat. Z výše uvedeného vyplývá, že do matematického modelu vstupují

Tabulka 3.5 Vstupní data rozšířeného modelu.

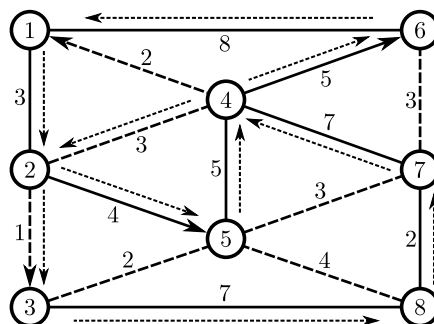
Vstupní data																
$ij$	(12)	(16)	(21)	(25)	(38)	(45)	(46)	(47)	(52)	(54)	(61)	(64)	(74)	(78)	(83)	(87)
$d_{ij}$	3	8	3	4	7	5	5	7	T	5	8	T	7	2	7	2
$ij$	(23)	(24)	(32)	(35)	(41)	(42)	(53)	(57)	(58)	(67)	(75)	(76)	(85)			
$e_{ij}$	1	3	T	2	2	3	2	3	4	3	3	3	4			

Zdroj: Vlastní zpracování.

data v podobě ohodnocení hran podsítí  $N_1$  a  $N_2$ . Tato data jsou pro každou podsít' uvedena v tabulce č. 3.5.

V kulatých závorkách je uvedeno označení příslušné hrany ( $ij$ ). Veličiny  $d_{ij}$ , resp.  $e_{ij}$  představují délku hrany v kilometrech. Prohibitivní konstanta  $T$  označuje „neprůjezdnost“ hrany v dané relaci.

Nyní budou prezentovány výsledky, které byly realizovány ve výpočetním prostředí Xpress-IVE s výše uvedenými daty. Aplikováním matematického modelu 3.12 – 3.16 na vstupních datech z tabulky č. 3.5 bylo obdrženo optimální řešení reprezentované posloupností vrcholů (1-2-3-8-7-4-2-5-4-6-1), které je vyznačeno na obrázku č. 3.6. Délka této trasy měří 45 km a lze tedy konstatovat, že trasa je optimálním uzavřeným tahem. Žádná hrana nebude projeta vícekrát. Hrany z podsítě  $N_2$ , které byly využity k minimalizaci ujeté vzdálenosti jsou (2-3) a (4-2).



Obrázek 3.6 Optimální řešení příkladu č. 3.3 (1-2-3-8-7-4-2-5-4-6-1).

Zdroj: Vlastní zpracování

Při porovnání řešení příkladu č. 3.2, kde bylo k obsluze možné využít pouze hran z podsítě  $N_1$ , s řešením příkladu č. 3.3, kde bylo možné pro efektivní přejezdy obslužného vozidla použít hran z podsítě  $N_2$ , je vidět, že bylo dosaženo úspory 12 km v počtu ujetých kilometrů.

Tímto byly představeny teoretické poznatky týkající se trasovacích úloh obecně. Bylo demonstrováno, jakým způsobem lze vyhledat optimální trasu obslužných vozidel při požadavku minimalizace celkové ujeté vzdáleností a s ní spojených provozních nákladů.

Nyní je nutné představit, jakým způsobem lze matematické modely verifikovat a validovat. O této problematice bude pojednáno v následující podkapitole.

### 3.1.3 Verifikace a validace matematických modelů

Tato podkapitola bude vztažena ke klíčovému bodu v procesu řešení problému. Bez korektně provedené validace a verifikace matematických modelů není možné tyto matematické modely použít pro řešení „ostrých“ problémů. Proces verifikace a validace je realizován tak, že na množině netriviálních úloh, jejichž správnost řešení je snadno ověřitelná, jsou testovány matematické modely. Obecně lze postup verifikace a validace, užitý v této práci, shrnout do tří kroků:

1. generování náhodné úlohy,
2. tvorba matice ohodnocených hran,
3. tvorba grafu,
4. aplikace matematického modelu,
5. realizace výpočtů,
6. posouzení přípustnosti a správnosti výsledků.

Uvedené kroky budou podrobněji popsány níže. Pro účely verifikace a validace matematických modelů bylo vygenerováno 10 úloh, na kterých byla následně ověřena funkčnost jednotlivých matematických modelů, prezentovaných v této práci.

Náhodné generování úloh bylo realizováno ve výpočetním prostředí Wolfram Mathematica. Jedná se o nejrozšířenější program ze skupiny tzv. CAS programů (angl. - Computer Algebra System), jenž dokáže řešit numerické i symbolické výpočty, a zároveň disponuje grafickým podsystémem umožňujícím práci s grafy, které lze generovat a zobrazovat. Nejdůležitější součástí programu je jeho výpočetní jádro KERNEL. S tímto jádrem lze komunikovat zaváděním příkazů v uživatelském editoru FRONTEND. Strukturu programu dále tvoří knihovny a databáze. Knihovny jsou předdefinované procedury pro výpočty z různých vědních oblastí, např. financí, statistiky apod. Databáze jsou obsahem nespočtu aktuálních a skutečných dat z různých oblastí, na které je Wolfram Mathematica napojen a které tak lze využít k výpočtům. Pomocí takto propracovaného konceptu se zařadil Wolfram Mathematica mezi nejuniverzálnější programové systémy na světě (Friedrich, 2013).

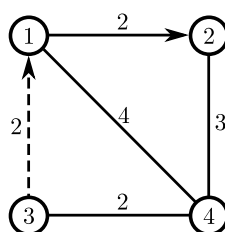
Každá úloha je reprezentována silně souvislým hranově ohodnoceným migrafem. Každé hraně je přiřazeno její ohodnocení z intervalu  $c(h) \in (0; 1)$ , což odpovídá délce pozemní komunikace v kilometrech. Ke každé takto vygenerované úloze byla následně vytvořena matice ohodnocení hran. Jedná se o matici, obsahující informace o délkách pozemních komunikací mezi lokalitami, které jsou bezprostředně propojeny. Jednotlivé matice jsou

uloženy ve formátu *\*.txt* na příloženém CD k této práci. Struktura zápisu má následující podobu:

```
d: [(1 2) 2 (1 4) 4
(2 1) 9999 (2 4) 3
(3 4) 2
(4 1) 4 (4 2) 3 (4 3) 2]
```

```
e: [(1 3) 9999
(3 1) 2]
```

Tato struktura zápisu odpovídá situaci zachycené na obrázku č. 3.7.



**Obrázek 3.7** Diagram migračního grafu generované úlohy.

*Zdroj: Vlastní zpracování*

Třetí krok spočívá ve vytvoření grafu ke každé úloze, který je exportován z prostředí Wolfram Mathematica ve formátu *\*.svg*. Všechny vstupní podklady vztažené k jednotlivým úlohám (matice ohodnocených hran a grafy) jsou označeny a uvedeny v přílohách předložené práce na CD. Kromě těchto příloh je v tištěné podobě uvedena vybraná úloha, na které bude výše uvedený postup verifikace a validace aplikován. Pro tuto demonstraci byla zvolena úloha č. 9.

## Popis vybrané úlohy

Pro každou úlohu je nutné naplánovat obslužnou trasu servisního vozidla, která začíná a končí v depu, které je situováno ve vrcholu č. 1. Každý náhodně vygenerovaný graf, který reprezentuje reálnou dopravní síť, je tvořen množinou *obsluhovaných hran* (označeny plnou čarou) a množinou *doplňkových hran* (označeny čárkovanou čarou). Předmětem obsluhy jsou hrany z množiny obsluhovaných hran. Hrany z množiny doplňkových hran je možné využít k efektivním přejezdům obslužného vozidla.

Ke každé úloze jsou řešeny dvě základní varianty, *A* a *B*. Předmětem řešení varianty *A* je obsluha hran z množiny obsluhovaných hran bez možností efektivních přejezdů obslužného vozidla. Předmětem řešení varianty *B* je obsluha hran z množiny obsluhovaných hran s možnostmi efektivních přejezdů s využitím hran z množiny doplňkových hran.

**Tabulka 3.6** Přehled výsledků vzorových úloh 1 a 2.

Značení úlohy	V/H/OH [-]/[-]/[-]	Síť [km]	Trasa [km]	Neproduktivně [km]	Úspora [km]	Rel. úspora [%]
1/A	102/104/3	58,5	108,3	49,8	-	-
1/B	102/104/3 + 31/64/5	58,5	82,1	23,6	26,2	24,2
2/A	121/130/10	68,9	112,3	43,4	-	-
2/B	121/130/10 + 7/36/8	68,9	95,8	26,9	16,5	14,7

*Zdroj: Vlastní zpracování.*

Následně jsou uvedeny tabulky č. 3.6 – 3.10, které zachycují veškeré vstupní a výstupní parametry vzorových úloh 1 až 10 pro varianty *A* i *B*. Jelikož je řešeno 10 úloh, byly tyto úlohy rozděleny po dvou do pěti tabulek s tím, že každá tabulka obsahuje úlohu jak z varianty *A*, tak z varianty *B*. Každá tabulka obsahuje tedy 4 úlohy.

**Tabulka 3.7** Přehled výsledků vzorových úloh 3 a 4.

Značení úlohy	V/H/OH [-]/[-]/[-]	Síť [km]	Trasa [km]	Neproduktivně [km]	Úspora [km]	Rel. úspora [%]
3/A	65/70/5	36,9	58,6	21,7	-	-
3/B	65/70/5 + 7/28/7	36,9	50	13,1	8,6	14,7
4/A	92/99/8	52,4	70,3	17,9	-	-
4/B	92/99/8 + 22/48/7	52,4	67,1	14,7	3,2	4,6

*Zdroj: Vlastní zpracování.*

Do těchto tabulek byly zavedeny vedle základních parametrů také ukazatele, vztažené k porovnání výsledků varianty *A*. Jedná se o ukazatel relativní úspory (*Rel. úspora*), který je vypočten jako procento úspory trasy varianty *B* z celkové trasy úloh varianty *A*. Pomocí tohoto ukazatele lze jak z hlediska kvantitativního, tak kvalitativního pozorovat efektivitu řešení úloh rozšířené varianty *B*, oproti variantě *A*.

První sloupec představuje označení úlohy a její varianty. Druhý sloupec *V/H/OH*, představuje informace o počtech vrcholů (*V*), hran (*H*) a orientovaných hran (*OH*). V případě úloh variant *B* jsou k tomuto údaji navíc přičteny hodnoty vrcholů, hran a orientovaných hran, které přibýly z doplňkové sítě. Sloupec *Síť*, udává součet ohodnocení všech hran. Dalším údajem je *Trasa*, která představuje celkovou ujetou vzdálenost obslužného vozidla v kilometrech. Sloupec *Neproduktivně*, uvádí součet ohodnocených hran, které musely být projety opakovaně. Zároveň platí, že rozdíl mezi hodnotou trasy a sítě je roven hodnotě neproduktivní vzdálenosti. Dalším údajem je *Úspora*, která vyjadřuje rozdíl celkové ujeté vzdálenosti mezi variantou *A* a *B* v kilometrech.

**Tabulka 3.8** Přehled výsledků vzorových úloh 5 a 6.

Značení úlohy	V/H/OH [-]/[-]/[-]	Síť [km]	Trasa [km]	Neproduktivně [km]	Úspora [km]	Rel. úspora [%]
5/A	82/84/4	43,3	62,1	18,8	-	-
5/B	82/84/4 + 20/42/3	43,3	57,6	14,3	4,5	7,3
6/A	85/86/3	47,3	69,6	22,3	-	-
6/B	85/86/3 + 19/45/3	47,3	66,9	19,6	2,7	3,9

Zdroj: Vlastní zpracování.

V posledním sloupci, *Rel. úspora*, jsou uvedeny hodnoty relativních úspor. Lze tak sledovat, o kolik % je varianta *B* ve srovnání s variantou *A* úspornější.

**Tabulka 3.9** Přehled výsledků vzorových úloh 7 a 8.

Značení úlohy	V/H/OH [-]/[-]/[-]	Síť [km]	Trasa [km]	Neproduktivně [km]	Úspora [km]	Rel. úspora [%]
7/A	133/139/7	71,1	112,3	41,2	-	-
7/B	133/139/7 + 52/100/2	71,1	95,9	24,8	16,4	14,6
8/A	121/123/5	63,7	96,9	33,2	-	-
8/B	121/123/5 + 26/63/3	63,7	82,9	19,2	14	14,5

Zdroj: Vlastní zpracování.

Nyní bude představen názorný výstup optimální trasy z rozhraní programu Xpress-IVE. Jako reprezentativní vzorek byla zvolena úloha číslo 9, jak v rámci varianty *A*, tak v rámci rozšířené varianty *B*.

Výsledné trase úlohy číslo 9, varianty *A*, odpovídá následující posloupnost vrcholů:

Tour: [1, 2, 3, 13, 12, 6, 7, 8, 9, 10, 9, 8, 7, 6, 11, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 52, 49, 50, 51, 61, 60, 61, 62, 63, 59, 57, 58, 57, 59, 63, 66, 68, 73, 79, 76, 77, 83, 87, 88, 89, 91, 92, 91, 89, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 97, 96, 95, 94, 99, 85, 84, 83, 115, 114, 113, 100, 101, 102, 101, 100, 113, 114, 115, 83, 77, 76, 79, 73, 68, 69, 70, 61, 51, 50, 49, 56, 55, 53, 52, 34, 33, 32, 30, 29, 28, 27, 26, 37, 36, 35, 47, 46, 47, 35, 36, 37, 26, 38, 39, 41, 42, 41, 39, 40, 46, 45, 43, 42, 22, 21, 11, 6, 5, 4, 3, 2, 17, 16, 15, 18, 122, 121, 127, 126, 129, 130, 131, 132, 137, 145, 144, 141, 142, 143, 142, 141, 147, 148, 149, 153, 154, 156, 157, 109, 110, 111, 106, 105, 106, 111, 110, 109, 157, 135, 134, 120, 119, 121, 122, 123, 122, 18, 124, 18, 15, 14, 2, 1]

**Tabulka 3.10** Přehled výsledků vzorových úloh 9 a 10.

Značení úlohy	V/H/OH [-]/[-]/[-]	Síť [km]	Trasa [km]	Neproduktivně [km]	Úspora [km]	Rel. úspora [%]
9/A	118/126/7	62	90,5	28,5	-	-
9/B	118/126/7 + 39/87/3	62	77,8	15,8	12,7	14
10/A	114/122/5	59,05	90,4	31,35	-	-
10/B	114/122/5 + 25/64/2	59,05	74,4	15,35	16	17,7

*Zdroj: Vlastní zpracování.*

Celková délka trasy, kterou vozidla technických služeb musí ujet v případě varianty *A*, činí 90,5 km. Z toho 28,5 km bude ujetu neproduktivně. Tato optimální trasa obsahuje 118 vrcholů, 126 hran a 7 orientovaných hran.

Výsledná trasa úlohy číslo 9 z varianty *B*, odpovídá následující posloupnosti vrcholů:

Tour: [1,2,3,12,6,5,4,3,13,12,6,7,8,9,10,9,8,7,6,11,21,22,42,41,39,38,26,37,36,35,47,46,40,39,40,46,45,43,42,22,21,23,24,25,26,27,28,29,30,32,33,34,52,49,56,55,53,52,49,50,51,61,60,57,58,57,59,63,66,68,69,70,61,62,63,66,68,73,79,76,77,83,87,88,89,91,92,91,89,93,94,95,96,97,98,97,96,95,94,99,85,84,83,115,114,113,100,101,102,103,104,105,106,111,110,109,157,135,134,120,119,121,127,126,129,130,131,132,137,145,144,141,142,143,142,141,147,148,149,153,154,156,157,109,110,113,116,120,119,121,122,123,124,18,122,18,15,14,2,17,16,15,14,2,1]

Délka této trasy činí 77,8 km, z toho 15,8 km ujedou vozidla technických služeb neproduktivně. Ve srovnání s variantou *A* došlo k úspoře o 12,7 km, což představuje 14 % zlepšení.

## 3.2 Numerické experimenty na reálných datech

Jak již bylo uvedeno, předmětem této práce je realizace návrhu optimálních tras obslužných vozidel zabezpečujících svoz separovaného odpadu města Olomouce. Dále bylo zmíněno, že svoz separovaného odpadu vykonávají Technické služby města Olomouce, a.s., a že je tento svoz rozdělen do tří základních oblastí. Na svoz papíru, skla a plastů.

Tato práce je zaměřena na svoz jedné komodity, a to plastu. Do této oblasti jsou řazeny obalové láhve z plastu, fólie všech druhů, plastové tašky, pytle a plastové přepravky. Technické služby města Olomouce, a.s. na svých internetových stránkách uvádí značení plastových obalů dle materiálového složení, které je uvedeno na obrázku č. 3.8.

**Obrázek 3.8** Značení plastů dle materiálového složení.Zdroj: [www.tsmo.cz](http://www.tsmo.cz)

Z výše uvedeného obrázku lze vidět, že plasty jsou členěny na polyetylentereftalát (PET; 1), vysokohustotní polyetylen (HDPE; 2), nízkohustotní polyetylen (LDPE; 4), polypropylen (PP; 5) a polystyren (PS; 6).

Technickými službami města Olomouce je plast svážen ve třech trasách. Nyní bude věnována pozornost vstupním datům, jejichž struktura je pro názornost uvedena v tabulce č. 3.11. Ve sloupci *Stanoviště* jsou obsaženy adresy míst, která požadují obsluhu. Tyto informace jsou variabilní, někdy se jedná o přesnou adresu i s číslem popisným, jindy pouze o název ulice. Dle požadavků Technických služeb města Olomouce je však předmětem obsluhy celá ulice (hrana) a tato skutečnost bude tedy zohledněna při úpravě dat, která bude popsána v následující samostatné podkapitole č. 3.2.1.

**Tabulka 3.11** Struktura vstupních dat.

Odběratel	Stanoviště	Četnost	Typ nádoby	Počet kusů
NZU Czech, s.r.o.	Olomouc, 28.října	1x7	PP120	1

Zdroj: *Vlastní zpracování.*

Ve sloupci *Odběratel* jsou uvedeny názvy odběratelských subjektů. Zpravidla se jedná o soukromé společnosti. Vstupní data obsahují rovněž informace o Četnostech svozu odpadu (plastů) pro daný subjekt. Např. údaj 1x7 představuje informaci o požadavku na svoz plastů jednou týdně. Ve vstupních datech se lze však setkat také s požadavkem na četnost svozu dvakrát týdně (2x7) a jednou za 14 dní (1x14). Vyjma tohoto časového formátu je v některých případech uvedena informace „Výzva“, jež představuje požadavek na svoz plastu na požádání.

Další důležitou informací je *Typ nádoby*. Technické služby města Olomouce, a.s. zajišťují svoz odpadu v popelových nádobách typu kontejnér (1100 litrů), PP240 (240 litrů), PP120 (120 litrů) a odpadkových pytlech (120 litrů). Tyto odpadové nádoby jsou pro názornost uvedeny na obrázku č. 3.9.

Posledním uvedeným údajem v tabulce č. 3.11 je *Počet kusů* odpadových nádob, které jsou situovány na daném stanovišti.

Jednotlivá vstupní data, (*PL 1*, *PL 2*, *PL 3*), odpovídají třem trasám obslužných vozidel, která v současné době vykonávají obsluhu. Pro každou trasu platí, že kapacita obslužného vozidla zcela postačuje pro obsluhu všech požadavků ke svozu.

Cílem úlohy je naplánovat trasu obslužného vozidla, která začíná a končí ve stanovišti číslo 1, obsahuje každou ulici alespoň jednou a její délka je minimální. Stanoviště číslo





**Obrázek 3.9** Odpadová nádoba PP240 (240 l), PP120 (120 l), kontejnér (1100 l) a odpadové pytle (120 l).

*Zdroj: [www.proteco-naradi.cz](http://www.proteco-naradi.cz) a [www.euronics.cz](http://www.euronics.cz)*

1 je situováno na adrese, Libušina 103, kde se nachází depo Technických služeb města Olomouce, a.s. Nyní, jak již bylo avízováno, následuje popis postupu úpravy uvedených vstupních dat.

### 3.2.1 Příprava vstupních dat

Vzhledem ke skutečnosti, že se jedná o obsluhu hran, tedy že předmětem obsluhy je ulice jako celek, nikoli jednotlivá čísla popisná, bylo nutné nahradit množinu čísel popisných, situovaných na jedné ulici, pouze názvem dané ulice. Tuto úpravu lze vysvětlit na následujícím reálném příkladě.

Obsahem obdržených vstupních dat byla 4 místa obsluhy situované na stejné ulici v Olomouci:

- 28. října 9
- 28. října 4
- 28. října 15
- 28. října 6

Tato čísla popisná byla odstraněna s tím, že byl zachován pouze název ulice bez čísel popisných, tedy pouze 28. října. Ulice 28. října bude ve vstupních datech reprezentována dvojicí vrcholů, které představují její počátek a konec. Takto byla upravena veškerá data, která byla dále opravena o drobné textové nepřesnosti s ohledem na oficiální názvy ulic. Po těchto úpravách je k dispozici síť ulic, pro kterou je nutné naplánovat trasu obslužného vozidla.

Pro realizaci výpočtů je tato uliční síť reprezentována grafem, resp. migrafem. Vstupní data charakterizují matice vzdáleností mezi jednotlivými vrcholy digrafu, byla získána na základě procesu geokódování s využitím nástroje ArcGIS. Struktura těchto dat, zpracovaná programem ARCGIS, odpovídá datům vstupujícím do programu Xpress-IVE.

## Kapitola 4

# Interpretace a ekonomické zhodnocení dosažených výsledků

V předcházejících kapitolách byla podrobně popsána teoretická východiska a samotné výpočetní řešení zaměřené na návrh trasy obslužného vozidla pro svoz plastů v podmínkách reálného provozu Technických služeb města Olomouce, a.s. Nyní lze přistoupit k interpretaci vypočtených výsledků a jejich ekonomickému zhodnocení. Cílem práce bylo naplánovat trasu obslužných vozidel, vykonávajících svoz komunálního odpadu při minimalizaci celkové ujeté vzdálenosti a s ní spojených nákladů na provoz těchto vozidel. Právě sníženým nákladům v podobě uspořené ujetých kilometrů bude v této kapitole věnována zásadní pozornost. Nejprve budou uvedeny výsledky optimalizace a následně budou propočteny úspory.

Jak již bylo uvedeno v kapitole 2.1, svoz komunálního a separovaného odpadu je nejrozsáhlejší činností, kterou Technické služby města Olomouce, a.s. zabezpečují<sup>1</sup>. Jen za rok 2016 činily výkony v této oblasti 127 955 tis. Kč, což představuje 41,9 % celkových výkonů společnosti v daném roce.

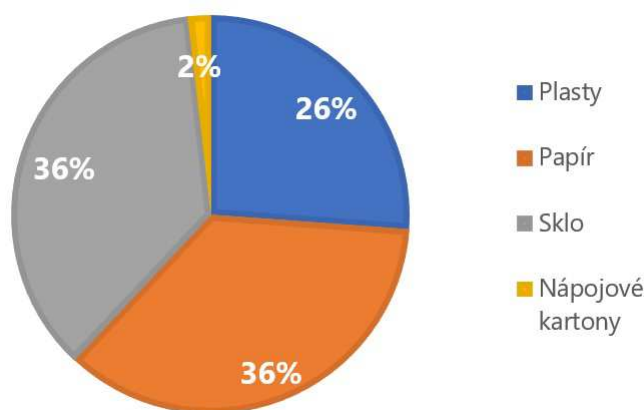
S ohledem na rozsah práce byl jako předmět návrhu optimálních tras zvolen svoz plastů, který v roce 2016 činil 26,16 % z celkového množství svezeného tříděného odpadu, což odpovídá 2158 t z celkových 8248 t tříděného odpadu. Pro větší názornost je zde uveden obrázek č. 4.1, který zachycuje jednotlivé podíly složek tříděného odpadu.

Výpočet a komparace úspory, plynoucí z optimalizace předmětné trasy, bude provedena za předpokladu, že svoz trasy požadované k obsluze bude prováděn pouze jednou. Tato trasa zde bude označena jako *PL1*. Stejně jako v podkapitole č. 3.1.3, ve které byly vzorové úlohy řešeny v rámci dvou variant, bude takto řešena i trasa *PL1*, tedy ve variantě *A* a *B*.

Předmětem řešení varianty *A* je obsluha hran z množiny obsluhovaných hran bez možností efektivních přejezdů obslužného vozidla. Předmětem řešení varianty *B* je obsluha hran z množiny obsluhovaných hran s možností efektivních přejezdů s využitím hran z množiny doplňkových hran. Výsledné parametry obou úloh jsou zachyceny v tabulce č. 4.1 níže.

---

<sup>1</sup>Činnost nakládání s odpady zabezpečuje Provozovna odpadového hospodářství Technických služeb města Olomouce, a.s.

**Obrázek 4.1** Podíly jednotlivých složek tříděného odpadu.Zdroj: Vlastní zpracování, [www.tsmo.cz](http://www.tsmo.cz)**Tabulka 4.1** Přehled výsledků úlohy *PL1* varianty *A* a *B*.

Parametr	Jednotka	Varianta A	Varianta B	B-A
Vrcholy	[-]	1735	3706	1971
Hrany	[-]	2051	6434	4383
Orientované hrany	[-]	231	763	532
Síť	[km]	183,438	183,438	-
Trasa	[km]	285,352	269,155	-16,197
Neproduktivně	[km]	101,914	85,717	-16,197

Zdroj: Vlastní zpracování.

Parametry tras v tabulce č. 4.1 jsou stejné jako v případě tabulky č. 3.6, podkapitoly č. 3.1.3. Přibyl pouze sloupec  $B - A$ , který uvádí hodnoty diferencí jednotlivých parametrů varianty  $B$  oproti variantě  $A$ . Tyto hodnoty poukazují na efektivitu provedené optimalizace.

Ve výsledné trase *PL1* varianty  $A$  je obsaženo 1735 vrcholů, 2051 hran a 231 orientovaných hran. Síť, představující součet ohodnocení všech hran, představuje stejně jako v případě varianty  $B$  183,438 km. Tuto síť je nutné obsloužit. Trasa požadovaná k obsluze po zaokrouhlení měří 285 km, z toho 102 km bude projeto neproduktivně.

Jak je z tabulky č. 4.1 zřejmé, v trase varianty  $B$ , variantě s možností využití doplňkových hran, došlo ke zvýšení počtů vrcholů o 1971 na celkem 3706, zároveň také k navýšení počtu hran o 4383 na celkem 6434 a orientovaných hran o 532 na 763. Síť, která je předmětem obsluhy, je v obou variantách stejná. Pro účely komparace je však nejdůležitějším ukazatelem údaj *Trasa*, představující celkovou ujetou vzdálenost trasy v dané variantě. Z uvedených výsledků lze konstatovat, že celková minimální trasa, kterou vozidla technických služeb musí projet v případě varianty  $B$ , tedy za předpokladu možného užití hran z množiny doplňkových hran, činí 269,155 km. Z toho 85,717 km bude ujet

neproduktivně. Ve srovnání s variantou *A* došlo k relativní úspoře o 5,68 %, což absolutně činí 16,197 km.

Následně po seznámení se s výsledky optimalizace trasy variant *A* a *B*, lze přistoupit k výpočtu nákladovosti a úspor. Tyto veličiny budou vypočteny na základě údajů o četnostech svozů na dané trase a budoucích očekávaných cen pohonných hmot. Nejprve bude proveden výpočet dle četnosti svozů.

## 4.1 Výpočet a komparace úspor podle četnosti svozu

Nákladovost trasy byla vypočtena za předpokladu známé průměrné spotřeby svozového vozidla technických služeb. Tato spotřeba činí 55 litrů na 100 km. Na základě této informace, údajů o počtu kilometrů a ceny nafty za litr, byla vypočtena nákladovost  $\alpha$  :

$$\alpha = \frac{s \cdot k \cdot c}{100} \quad (4.1)$$

kde  $s$  představuje spotřebu pohonné hmoty v litrech na 100 kilometrů,  $k$  počet ujetých kilometrů a  $c$  cenu za jeden litr nafty. Následně je pro výpočet nákladovosti nutné stanovit cenu nafty. Aktuální cena byla převzata z dat Českého statistického úřadu, který průměrnou spotřebitelskou cenu motorové nafty *Diesel* stanovuje na úrovni 30,02 CZK za 1 litr. Nyní, když jsou veškeré nutné údaje známy, lze přejít k samotným výsledkům.

V následující tabulce č. 4.2 jsou uvedeny údaje o celkové trase a její nákladovosti pro obě varianty. Dalším údajem je *Úspora*, představující rozdíl mezi vypočtenou hodnotou varianty *A* oproti variantě *B*. Údaj *Rel. úspora*, jak je z názvu zřejmé, vyjadřuje relativní úspory varianty *B*.

**Tabulka 4.2** Výsledky trasy *PL1* varianty *A* a *B* při četnosti svozu 1x7.

	Jedn.	Variant A	Variant B	Úspora (B-A)	Rel. úspora (v %)
Trasa	[km]	285,352	269,155	-16,197	5,676
Nákladovost	[Kč]	4711,447	4444,018	-267,429	5,676

*Zdroj: Vlastní zpracování.*

Náklady na spotřebu pohonných hmot na jednu trasu v případě varianty *A* činí po zaokrouhlení 4711 Kč a v případě varianty *B* 4444 Kč. Celková úspora na spotřebě pohonných hmot činí tedy 267,429 Kč, což odpovídá vzdálenosti 16,2 kilometrů při spotřebě jednoho svozného vozidla 55 litrů na 100 kilometrů. Při zavedení trasy varianty *B*, tedy při možném využití hran z množiny doplňkových hran, došlo k relativní úspoře o 5,68 %.

Nyní, když jsou známy výsledky úspor a nákladovosti na jednu trasu, lze přejít k výpočtům na měsíční a roční bázi. Dosud bylo předpokládáno, že vozidlo technických služeb projíždí trasu *PL1* pouze jednou týdně (1x7). Avšak na základě obdržených dat

je tento předpoklad upraven na obsluhu trasy dvakrát týdně (2x7). V tabulce č. 4.3 jsou uvedeny měsíční výpočty za předpokladu 52 týdnů v roce.

**Tabulka 4.3** Měsíční výsledky trasy *PL1* varianty *A* a *B* při četnosti svozu 2x7.

	Jedn.	Variant A	Variant B	Úspora (B-A)	Rel. úspora (v %)
Celkem km	[km]	2282,816	2153,240	-129,576	5,676
Nákladovost	[Kč]	37691,575	35552,146	-2139,429	5,676

*Zdroj: Vlastní zpracování.*

Z výše uvedené tabulky je zřejmé, že při využití naplánované trasy varianty *B* bude měsíčně ušetřeno 140 km a 2317 Kč na nákladech za pohonné hmoty. V tabulce č. 4.4 jsou zaznamenány stejné informace jako v tabulce č. 4.3, avšak v ročním vyjádření.

**Tabulka 4.4** Roční výsledky trasy *PL1* varianty *A* a *B* při četnosti svozu 2x7 a aktuální ceny 30,02 Kč/l.

	Jedn.	Variant A	Variant B	Úspora (B-A)	Rel. úspora (v %)
Celkem ujeté	[km]	29676,608	27992,120	-1684,488	5,676
Nákladovost	[Kč]	489990,475	462177,893	-27812,581	5,676

*Zdroj: Vlastní zpracování.*

Celková roční úspora na nákladech PHM na plánované trase varianty *B* činí po zaokroulení 27813 Kč. To odpovídá úspoře 1684 ujetých kilometrů. Ve srovnání s variantou *A* se předpokládá zlepšení o 5,676 % jak v ujetých kilometrech, tak nákladech za PHM.

V následující kapitole bude vypočtena nákladovost spolu s jednotlivými úsporami na základě očekávaných průměrných cen pohonných hmot.

## 4.2 Výpočet a komparace úspor na základě odhadnutých cen pohonných hmot

Tak jako výpočty hodnot na roční bázi, lze provést výpočet očekávaných nákladů a úspor z pohonných hmot na základě očekávaných cen motorové nafty za rok 2018 a 2019. Je potřeba říci, že cena motorové nafty je ovlivněna mnoha faktory<sup>2</sup> a její prognóza nebude s ohledem na rozsah a cíl práce předmětem této kapitoly. Očekávané ceny budou však převzaty ze *Zprávy o inflaci* České národní banky (ČNB) z první čtvrtletí roku 2018.

<sup>2</sup>Jedná se např. o cenu ropy, systém zdanění (spotřební daň a DPH), měnový kurz, sezónnost, očekávání, nabídku a poptávku atd.

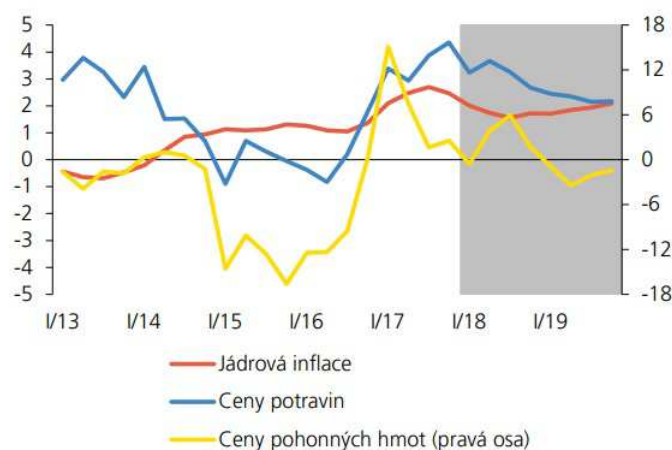
ČNB v této zprávě uvádí prognózu cen PHM, jejíž hodnoty jsou pro názornost uvedeny v tabulce č. 4.5 za období 2016 až 2019.

Na obrázku č. 4.2 je pak uveden historický a očekávaný vývoj složek inflace, jenž obsahuje mimo jiné ceny PHM.

**Tabulka 4.5** Očekávané průměrné meziroční změny cen PHM za období 2016–2019 (v %).

Rok	2016	2017	2018	2019
Průměrná meziroční změna	-8,5	6,7	2,7	-2,0

Zdroj: Vlastní zpracování, ČNB



**Obrázek 4.2** Vývoj složek inflace za období 2013–2019, čtvrtletně (v %).

Zdroj: ČNB

Jelikož nejsou zveřejňovány a vytvářeny prognózy o jednotlivých složkách PHM tak, aby bylo možné zjistit cenu pouze jedné složky (motorové nafty), budou výpočty očekávaných nákladů, resp. úspor vycházet ze získaných hodnot očekávaných změn cen PHM (viz tabulka č. 4.5).

Očekávaná cena PHM za rok 2018 ( $E(c_{2018})$ ) je vypočtena jako součin průměrné ceny nafty v roce 2017 ( $c_{2017} = 29,89$  Kč/l) a meziroční změny ceny PHM v roce 2018 ( $E(\Delta c) = 2,7$  %):

$$E(c_{2018}) = c_{2017} \cdot \left( \frac{E(\Delta c)}{100} + 1 \right)$$

$$E(c_{2018}) = 29,89 \cdot 1,027$$

$$E(c_{2018}) = 30,697 \text{ Kč/l}$$

Stejně tak byla vypočtena očekávaná cena na rok 2019:

$$E(c_{2019}) = c_{2018} \cdot \left( \frac{E(\Delta c)}{100} + 1 \right)$$

$$E(c_{2019}) = 30,697 \cdot (0,98)$$

$$E(c_{2019}) = 30,083 \text{ Kč/l}$$

ČNB (2018) ve *Zprávě o inflaci* uvádí, že předpokládaný nárůst cen PHM v roce 2018 bude způsoben růstem ceny ropy, který bude však do částečné míry kompenzován posílením měnového páru CZK/USD<sup>3</sup>. Naopak v roce 2019 se očekává meziroční pokles cen PHM z důvodu poklesu světových cen ropy.

Na základě obdržených výsledků lze vypočítat očekávanou nákladovost a úspory v roce 2018 při očekávané ceně 30,697 Kč za jeden litr nafty a pro rok 2019 při očekávané ceně 30,083 Kč za jeden litr nafty. Nákladovost byla vypočtena opět pomocí vzorce č. 4.1 a úspora jako rozdíl této nákladovosti mezi variantou *B* a *A*. Vypočtené hodnoty jsou zaznamenány pro rok 2018 v tabulce č. 4.6 a pro rok 2019 v tabulce č. 4.7.

**Tabulka 4.6** Očekávané roční výsledky trasy *PL1* varianty *A* a *B* za celý rok 2018 při četnosti svozu 2x7 a očekávané ceně 30,697 Kč/l.

	Jedn.	Varianta A	Varianta B	Úspora (B-A)	Rel. úspora (v %)
Celkem ujeté	[km]	29676,608	27992,120	-1684,488	5,676
Nákladovost	[Kč]	501040,560	472600,759	-28439,800	5,676

*Zdroj: Vlastní zpracování*

Celková úspora při využití plánované trasy varianty *B* činí 1684,488 km, což při spotřebě vozidla 55l/100km představuje očekávanou průměrnou roční úsporu ve výši 28439,8 Kč na nákladech spotřeby PHM. Ve srovnání s variantou *A* se jedná o 5,676 % úsporu.

**Tabulka 4.7** Očekávané roční výsledky trasy *PL1* varianty *A* a *B* za celý rok 2019 při četnosti svozu 2x7 a očekávané ceně 30,083 Kč/l.

	Jedn.	Varianta A	Varianta B	Úspora (B-A)	Rel. úspora (v %)
Celkem ujeté	[km]	29676,608	27992,120	-1684,488	5,676
Nákladovost	[Kč]	491018,769	463147,820	-27870,949	5,676

*Zdroj: Vlastní zpracování, ČNB*

<sup>3</sup>Dnešní cenový růst ropy lze především přisuzovat klíčovým ropným těžbařům a jejich dohodě s Ruskem na omezující těžbě ropy, což tlačí světové ceny vzhůru.

Z výše uvedené tabulky č. 4.7 je zřejmé, že se do očekávané průměrné roční úspory promítnou zmíněné faktory, působící na pokles cen ropy a tedy PHM, neboť očekávaná roční úspora činí 27870,949 Kč, což je ve srovnání s rokem 2018 o 2 % méně.

V následující tabulce č. 4.8 je shrnuto celkové srovnání vypočtených ročních úspor vzhledem k jednotlivým cenám nafty. Sloupec 2018a obsahuje výpočet roční úspory na základě aktuální ceny motorové nafty 30,020 Kč/l. Hodnota roční úspory, uvedené ve sloupci 2018b, byla vypočtena pomocí výše propočtené očekávané roční průměrné ceny ( $E(c_{2018}) = 30,697$  Kč/l). V posledním sloupci 2019 je vypočtena roční úspora na základě očekávané roční průměrné ceny nafty za rok 2019 ( $E(c_{2018}) = 30,697$  Kč/l).

**Tabulka 4.8** Očekávané roční úspory trasy PL1 varianty B za jednotlivé roky a ceny při četnosti svozu 2x7.

	Jedn.	2018a	2018b	2019
Cena	[Kč]	30,020	30,697	30,083
Úspora	[Kč]	27812,581	28439,800	27870,949

*Zdroj: Vlastní zpracování*

Nejvyšší očekávaná úspora byla vypočtena za tento rok 2018 při průměrné roční odhadované ceně 30,697 Kč/l nafty. Jedná se však o teoretický výpočet na základě odhadovaných budoucích cen nafty, tudíž hodnoty slouží pouze pro orientační účely.





# Kapitola 5

## Závěr

Cílem předložené diplomové práce byl návrh tras obslužných vozidel, vykonávajících svoz separovaného odpadu v podmínkách Technických služeb města Olomouce, a.s. tak, aby byla minimalizována celková ujetá vzdálenost a s ní spojené náklady.

Ke splnění tohoto cíle bylo využito mimo jiných především poznatků z teorie grafů a matematického programování.

Práce je vyjma úvodu a závěru rozdělena do tří kapitol. Samotnému návrhu tras předcházelo vymezení teoretických východisek. Ty byly popsány ve druhé kapitole, ve které byl řešený problém představen a následně byly definovány poznatky teorie grafů spolu s matematickým programováním. V souvislosti s matematickým programováním byly na řešení vzorové úloze dopravního problému představeny dva optimalizační programy, nástroj Řešitel z programu MS Excel, a optimalizační nástroj Xpress-IVE. Ve druhém jmenovaném programu byly provedeny veškeré optimalizační výpočty v této práci.

Třetí část práce byla pojata jako příprava pro závěrečné vyhodnocení ve čtvrté kapitole, která se týká ekonomické interpretace. V této kapitole byla představena problematika trasovacích úloh obecně. Byly zde popsány teoretické poznatky a matematické modely trasovacích úloh, zaměřených na obsluhu vrcholů a obsluhu hran. Následně byla provedena verifikace a validace předmětných matematických modelů, které byly aplikovány na deseti vzorových úlohách. V poslední řadě byly provedeny numerické experimenty na reálných datech a byla připravena vstupní data pro výpočet.

Ve čtvrté části práce je uvedena interpretace a ekonomické zhodnocení výsledků. V první řadě jsou zde okomentovány výsledky, kterých bylo dosaženo. Následně byly propočteny náklady a úspory trasy dle četnosti svozu a ceny pohonných hmot.

Je třeba připomenout, že výpočty nákladů a úspor, uvedené v kapitole č. 4, byly řešeny pouze za předpokladu optimalizace jedné trasy a jedné odpadové komodity. V případě, že by se společnost rozhodla pro optimalizaci většího počtu svozových tras, došlo by tak k násobku ušetřených nákladů. Neboť, jak již bylo zmíněno, Technické služby města Olomouce a.s. zabezpečují celkový svoz nejen separovaného odpadu, kde jsou řazeny mimo zmíněné plasty např. papír, sklo, biologický odpad apod., ale rovněž obstarávají svoz velkoobjemného odpadu a komunálního odpadu.

Takto objemné uspořené částky by mohly být investovány např. do technického vybavení společnosti, neboť jen v roce 2016 bylo podle výroční zprávy Technických služeb města Olomouce, a.s. téhož roku investováno 7 201 tis. Kč. Uspořené prostředky by se mohly rovněž využít na rozšíření projektu propagace třídění odpadů.

V závěru této kapitoly lze konstatovat, že snižování nákladů na základě optimalizace tras a snížení počtu možných ujetých kilometrů lze považovat za velmi efektivní nástroj. To platí obzvláště v této době, kdy existují nejisté výhledy na odkup separovaných plastů jednotlivými odběrateli. Dokládá to klesající poptávka čínských odběratelů plastů. To se významně odráží v neklesající ceně plastů v hospodaření firem, orientovaných na recyklaci, obchodování či pouze svoz odpadů, neboť prodej svozového plastu je zpravidla jedna z vedlejších výnosových činností těchto společností. V České republice a Evropské Unii je tento problém potvrzen, neboť zde nefiguruje dostatečný počet zpracovatelských společností. Alarmující prognóza produkce odpadového plastu pro rok 2020 je 400 mil. tun a pro rok 2050 závratných 700 mil. tun.

Nabízí se řešení, že ohrožené společnosti budou dotovány, což pravděpodobně může způsobit nárůst cen svozových služeb pro občany. Proto stojí za úvahu zhodnotit možnost snižování nákladů při klesajících výnosech možnou optimalizací svozových tras.

# Literatura

## Monografie

- [1] BONDY, J. Adrian and U. S. R. MURTY. *Graph theory*. New York: Springer, 2018. 548 s. ISBN 978-1-84628-969-9.
- [2] BRAMEL, J., X. CHEN and D. SIMCHI-LEVI. *The Logic of Logistic*. New York: Springer, 2014. ISBN 978-1-4614-9148-4.
- [3] COOK, J. William. *Po stopách obchodního cestujícího: Matematika na hranicích možností*. Praha: Dokořán, 2012. 256 s. ISBN 978-80-7363-412-4.
- [4] DASGUPTA, S., Ch. H. PAPADIMITRIOU and U. VIRKUMAR. *Algorithms*. New York: McGraw-Hill Higher Education, 2008. 320 s. ISBN 978-0-07-352340-8.
- [5] DEVLIN, Keith J. *Problémy pro třetí tisíciletí: Sedm největších nevyřešených otázek matematiky*. 1. vyd. Praha: Dokořán, 2005. 269 s. ISBN 80-7363-016-8.
- [6] FÁBRY, Jan. *Matematické modelování*. 1. vyd. Praha: Professional Publishing, 2007. 180 s. ISBN 978-80-7431-066-9.
- [7] FICO Xpress Optimization Suite. *Xpress-Mosel: User guide*. United Kingdom: Blisworth: Dash Associates, 2005.
- [8] FRIEDRICH, Pavel. *Mathematica na počítači pro nematematiky*. 1. vyd. Ostrava: VŠB-TU Ostrava, 2013. 254 s. ISBN 978-80-248-3162-6.
- [9] FU, Michael and Saul GASS. (Eds.) *Encyklopedia of Operations Research and Management Science*. New York: Springer, 2013. ISBN 978-1-4419-1137-7.
- [10] GUERÉT, Ch., Ch. PRINS and M. SEVAUX. *Applications of optimization with Xpress-MP*. Dash Optimization, 2002. ISBN 0-9543503-0-8.
- [11] JABLONSKÝ, Josef. *Operační výzkum: kvantitativní modely pro ekonomické rozhodování*. 3. vyd. Praha: Professional Publishing, 2007. 323 s. ISBN 978-80-86946-44-3.
- [12] JANÁČEK, Jaroslav. *Matematické programování*. 2. vyd. Žilina: Žilinská univerzita, 2003. 225 s. ISBN 80-8070-054-0.
- [13] JANÁČEK, Jaroslav. *Optimalizace na dopravních sítích*. 1. vyd. Žilina: Žilinská univerzita, 2002. 248 s. ISBN 80-8070-031-1.

- [14] PALÚCH, Stanislav. *Algoritmická teória grafov*. Žilina: EDIS, 2008.
- [15] SAHA RAY, Santanu. *Graph theory with Algorithms and its Applications: In Applied Science and Technology*. New Delhi: Springer, 2013. ISBN 978-81-322-0749-8.
- [16] WOLFRAM, Stephen. *An elementary introduction to the Wolfram language*. Champaign: Wolfram Media, 2015. ISBN 978-1-944183-00-4.

## **Príspevky ve sbornících**

- [17] KOZEL, Petr and Šárka MICHALCOVÁ . *The Use of Linear Programming to Solve Routing Tasks in Practice*. In: Proc. of 33th International Conference Mathematical Methods in Economics, Cheb, 2015, pp. 395–400. ISBN 978-80-261-0539-8.
- [18] KOZEL, P., Š. MICHALCOVÁ and V. FRIEDRICH. *The Using of Linear Programming for Solving the Municipal Waste Collection Problem*. In: Proc. of 32nd International Conference Mathematical Methods in Economics, Olomouc, pp. 483–488. ISBN 978-80-244-4209-9.

## **Internetové zdroje**

- [19] AUTOR NEUVEDEN. PROTECO NÁŘADÍ S.R.O. *www.proteco-naradi.cz: Zahradna, stavba* [online]. [cit. 2018-04-01]. Dostupné z: <http://www.proteco-naradi.cz/popelnice-120-l-plastova-cerna-s-kolecky-g65424.html>.
- [20] AUTOR NEUVEDEN. EURONICS ČR, A.S. *www.euronics.cz: Popelnice CEV 3MEV05, 240L černá černé* [online]. [cit. 2018-04-01]. Dostupné z: <https://www.euronics.cz/popelnice-cev-3mev05-240l-cerna-cerne-zep3mev05ce/p279908/>.
- [21] ČESKÁ NÁRODNÍ BANKA. ČNB: *Zpráva o inflaci – I/2018* [online]. 2018 [cit. 2018-04-01]. Dostupné z: [https://www.cnb.cz/cs/menova\\_politika/zpravy\\_o\\_inflaci/2018/2018\\_I/index.html](https://www.cnb.cz/cs/menova_politika/zpravy_o_inflaci/2018/2018_I/index.html). ISSN 1804-2457
- [22] ČESKÝ STATISTICKÝ ÚŘAD. ČSÚ: *Šetření průměrných cen vybraných výrobků - pohonné hmoty a topné oleje - časové řady* [online]. 2016 [cit. 2018-04-01]. Dostupné z: <https://www.czso.cz/csu/czso/setreni-prumernych-cen-vybranych-vyrobk-u-pohonne-hmoty-a-topne-oleje-casove-rad-y>.
- [23] ČTK. *Česko má kvůli Číně potíže s odpady*. Novinky.cz [online]. 2018 [cit. 2018-04-01]. Dostupné z: <https://www.novinky.cz/domaci/464898-cesko-ma-kvuli-cine-potize-s-odpady.html>.
- [24] STATUTÁRNÍ MĚSTO OLOMOUC: oficiální informační portál. *Produkce a míra materiálového využití odpadů v Olomouci v letech 2011-2016* [online]. 2016 [cit. 2018-04-01]. Dostupné z: <https://www.olomouc.eu/aktualni-informace/odpadove-hospodarstvi>.
- [25] TECHNICKÉ SLUŽBY MĚSTA OLOMOUCE A.S. *Svoz odpadu* [online]. 2014 [cit. 2018-04-01]. Dostupné z: <https://www.tsmo.cz/sluzby/svoz-odpadu/>.

- [26] TECHNICKÉ SLUŽBY MĚSTA OLOMOUCE A.S. *Výroční zpráva 2016* [online]. 2017 [cit. 2018-04-01]. Dostupné z: <https://www.tsmo.cz/o-nas/vyrocní-zpravy/>.



# Seznam zkratek

<b>*.svg</b>	– Vektorový grafický formát
<b>*.txt</b>	– Soubor s příponou text
<b>CAS</b>	– Computer Algebra System
<b>CPP</b>	– Chinese Postman Problem
<b>ČNB</b>	– Česká národní banka
<b>DPH</b>	– Daň z přidané hodnoty
<b>NP</b>	– Nondeterministic Polynomial (time)
<b>PHM</b>	– Pohonné hmoty
<b>TSMO</b>	– Technické služby města Olomouce
<b>TSP</b>	– Travelling Salesman Problem





# Seznam obrázků

2.1	Diagramy a) grafu a b) digrafu . . . . .	9
2.2	Diagram a) hranově ohodnoceného grafu a b) vrcholově ohodnoceného digrafu	10
2.3	1–3 sled: (1-2-4-6-5-2-4-3) . . . . .	13
2.4	1–3 tah: (1-2-4-6-5-4-3) . . . . .	13
2.5	1–3 cesta: (1-2-5-6-4-3) . . . . .	14
2.6	Silně souvislý digraf . . . . .	15
2.7	Orientovaně souvislý digraf . . . . .	15
2.8	Jednotlivé fáze rozhodovacího procesu . . . . .	16
2.9	Nastavení parametrů nástroje Řešitel pro optimalizaci vzorového příkladu č. 2.1 v rozhraní programu Excel . . . . .	21
3.1	Graf $N = (V, H, l)$ . . . . .	28
3.2	Optimální řešení příkladu 3.1 (1-2-3-5-8-7-6-7-4-1) . . . . .	31
3.3	Graf $N_1 = (V_1, H_1, l)$ . . . . .	32
3.4	Optimální řešení příkladu č. 3.2 (1-2-5-4-7-8-3-8-7-4-6-1) . . . . .	35
3.5	Síť $N$ s vyznačením podsítí $N_1$ a $N_2$ odpovídající zadání příkladu č. 3.3 . .	36
3.6	Optimální řešení příkladu č. 3.3 (1-2-3-8-7-4-2-5-4-6-1) . . . . .	37
3.7	Diagram migrafu generované úlohy . . . . .	39
3.8	Značení plastů dle materiálového složení . . . . .	43
3.9	Odpadová nádoba PP240 (240 l), PP120 (120 l), kontejnér (1100 l) a odpadové pytle (120 l) . . . . .	44
4.1	Podíly jednotlivých složek tříděného odpadu . . . . .	46
4.2	Vývoj složek inflace za období 2013–2019, čtvrtletně (v %) . . . . .	49

# Seznam tabulek

2.1	Matice přilehlosti $M$ digrafu z obrázku 2.1 <i>b</i> ) . . . . .	11
2.2	Matice ohodnocení hran $M$ grafu z obrázku č. 2.2 <i>a</i> ) . . . . .	12
2.3	Vstupní data příkladu č. 2.1 – Zdroje . . . . .	19
2.4	Vstupní data příkladu č. 2.1 – Zákazníci . . . . .	19
2.5	Matice vzdálenosti vzorového příkladu č. 2.1 . . . . .	20
2.6	Matice proměnných vzorového příkladu č. 2.1 . . . . .	22
2.7	Matice účelové funkce vzorového příkladu č. 2.1 . . . . .	22
3.1	Matice ohodnocení hran $l_{ij}$ migrafu $N = (V, H, l)$ . . . . .	29
3.2	Matice vzdáleností $d_{ij}$ migrafu $N = (V, H, d)$ . . . . .	29
3.3	Matice ohodnocení hran $l_{ij}$ migrafu $N_1 = (V_1, H_1, l)$ . . . . .	33
3.4	Matice ohodnocení hran $l_{ij}$ migrafu $N_1 = (V_1, H_1, l)$ po zavedení prohibitivní konstanty $T$ . . . . .	34
3.5	Vstupní data rozšířeného modelu . . . . .	37
3.6	Přehled výsledků vzorových úloh 1 a 2 . . . . .	40
3.7	Přehled výsledků vzorových úloh 3 a 4 . . . . .	40
3.8	Přehled výsledků vzorových úloh 5 a 6 . . . . .	41
3.9	Přehled výsledků vzorových úloh 7 a 8 . . . . .	41
3.10	Přehled výsledků vzorových úloh 9 a 10 . . . . .	42
3.11	Struktura vstupních dat . . . . .	43
4.1	Přehled výsledků úlohy <i>PL1</i> varianty <i>A</i> a <i>B</i> . . . . .	46
4.2	Výsledky trasy <i>PL1</i> varianty <i>A</i> a <i>B</i> při četnosti svozu 1x7 . . . . .	47
4.3	Měsíční výsledky trasy <i>PL1</i> varianty <i>A</i> a <i>B</i> při četnosti svozu 2x7 . . . . .	48
4.4	Roční výsledky trasy <i>PL1</i> varianty <i>A</i> a <i>B</i> při četnosti svozu 2x7 a aktuální ceny 30,02 Kč/l . . . . .	48
4.5	Očekávané průměrné meziroční změny cen PHM za období 2016–2019 (v %) . . . . .	49
4.6	Očekávané roční výsledky trasy <i>PL1</i> varianty <i>A</i> a <i>B</i> za celý rok 2018 při četnosti svozu 2x7 a očekávané ceně 30,697 Kč/l . . . . .	50
4.7	Očekávané roční výsledky trasy <i>PL1</i> varianty <i>A</i> a <i>B</i> za celý rok 2019 při četnosti svozu 2x7 a očekávané ceně 30,083 Kč/l . . . . .	50
4.8	Očekávané roční úspory trasy <i>PL1</i> varianty <i>B</i> za jednotlivé roky a ceny při četnosti svozu 2x7 . . . . .	51

# Prohlášení o využití výsledků diplomové práce

Prohlašuji, že

- jsem byl seznámen s tím, že na diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. (autorský zákon), zejména § 35 – užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školních představení a užití díla školního a § 60 – školní dílo;
- беру на ведоми, же Высoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen VŠB-TUO) má právo nevýdělečně, ke své vnitřní potřebě, diplomovou práci užít (§ 35, odst. 3);
- souhlasím s tím, že diplomová práce bude v elektronické podobě archivována v Ústřední knihovně VŠB-TUO a jeden výtisk bude uložen u vedoucího diplomové práce. Souhlasím s tím, že bibliografické údaje o diplomové práci budou zveřejněny v informačním systému VŠB-TUO;
- bylo sjednáno, že s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu § 12, odst. 4 autorského zákona;
- bylo sjednáno, že užít své dílo, diplomovou práci, nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše).

V Ostravě dne 16. dubna 2018

.....  
  
Bc. František Špaček